

Cahier

I

Recherche :

problèmes

thèmes de problèmes

exercices intéressant

du 1.11.78

I

au

7.6.79

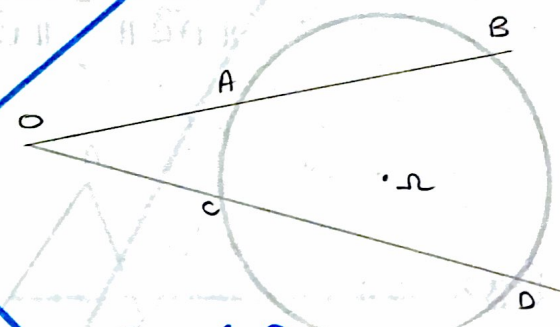
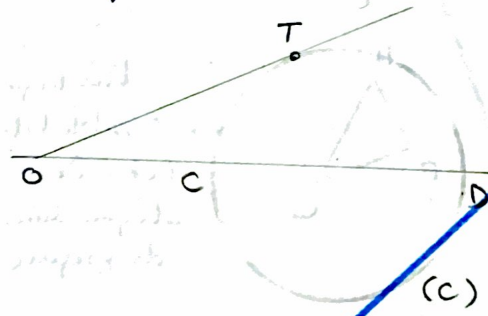
Theb

① 1° Montrer l'équivalence, A, B, D, C étant 4 points distincts de l'e.a. E de dimension 2 :

$$A, B, C, D \text{ sont cocycliques} \Leftrightarrow \begin{cases} (AB) \cap (CD) = \{O\} \\ \text{et } \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC} \cdot \overline{OD} \end{cases}$$

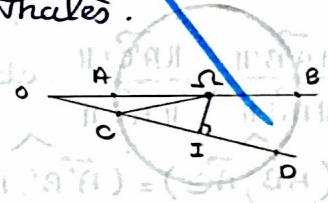
2° Soit un cercle (C) , et $O \notin (C)$.

La tangente au cercle C passant par O coupe C en T . Montrer que $\overline{OT}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$.



cf Bayen + Ramis

(Ind : On utilisera la droite $O\Omega$ et 2 fois le théorème de Pythagore. La réciproque se fait facilement en utilisant l'aller, comme pour le th. de Thalès.
 $\widehat{O\Omega I}$ et $\widehat{C\Omega I}$)

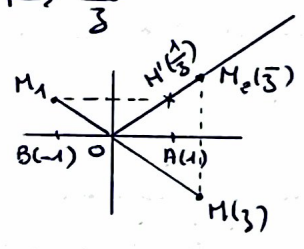


② Application de l'exercice ①.

Construire géométriquement l'image du complexe z par l'application

$$b: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{z}$$

(Ind :



Faire intervenir $A(1)$ $B(-1)$. M' droite $\frac{1}{2}$ de v. dir. $\vec{j}$.
 et $z'z=1 \Rightarrow |z||z'|=1 \Rightarrow \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = -\overline{OA} \cdot \overline{OB}$
 $\Rightarrow \overline{OM} \cdot \overline{OM_1} = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$ etc...

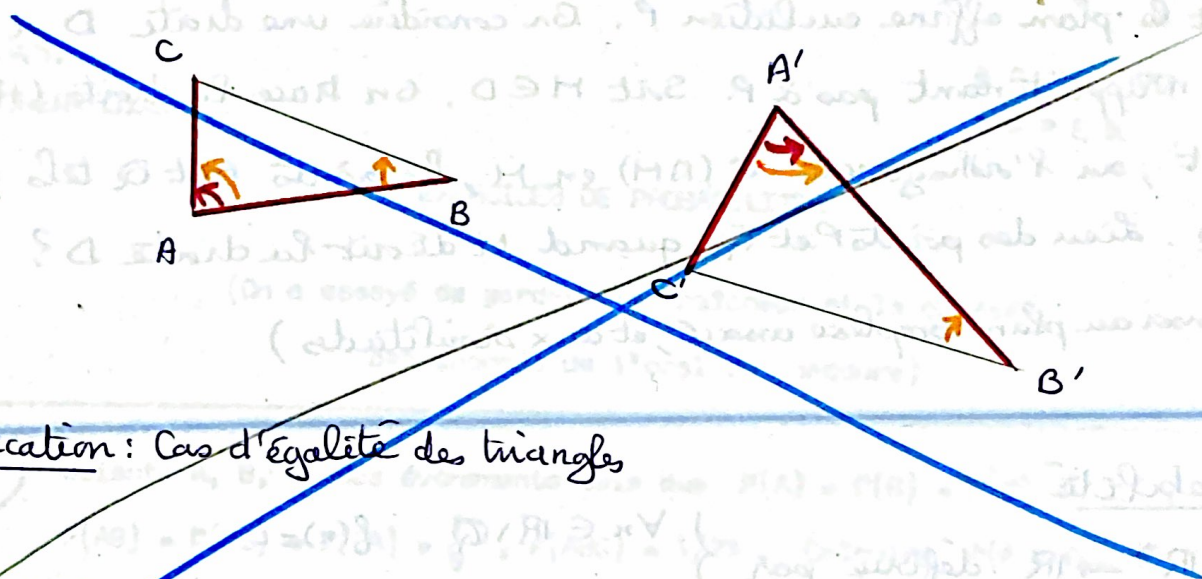
③ Triangles semblables. (Zuysanne + III p 86)

cf T (p 991)

A, B, C (resp. A', B', C') trois points non alignés de l'e.a. E (dim $E=2$)

1° / Montrer que s'il existe une similitude β de E telle que

$$\beta(A) = A' \quad \beta(B) = B' \quad \beta(C) = C'$$



Application: Cas d'égalité des triangles

(Sol : I.35)

④ s = similitude directe de centre O / $s(M) = M'$ et $s(N) = N'$ (M et N distincts)

Montrer que la similitude directe de centre O , qui transforme M en N , transforme M' en N' .

(Ind : forme complexe $z' = az + b$)

⑤ Soit s_0 la similitude définie par $z' = iz + 2$

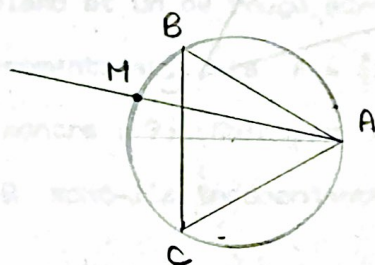
1° Déterminer les similitudes directes s qui commutent avec s_0 . Quel est le centre d'une telle similitude.

2° Démontrer que l'ensemble des similitudes directes s qui commutent avec s_0 est un sous-groupe du groupe $\mathcal{I}^+$ des sim. directes.

3° Existe-t-il une sim. indirecte qui commute avec s_0 ?

⑥ Soit C le cercle circonscrit à un triangle équilatéral. Montrer que

$$\forall M \in C \text{ et } M \in \text{arc } BC \Rightarrow MA = MB + MC$$



(Ind : faire intervenir $1, \bar{z}, \bar{s}$)

(Sol : Vuibert ex. Terminale C tome 2 p 285)

⑦ Soit le plan affine euclidien P . On considère une droite D et un point A n'appartenant pas à P . Soit $M \in D$. On trace la droite (AM) . On définit, sur l'orthogonale à (AM) en M , les points P et Q tels que $MP = MQ$. Lieu des points P et Q quand M décrit la droite D ?

(Ind : penser au plan complexe associé, et aux similitudes)

⑧ Dérivabilité

Soit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & f(x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{Q}^* & f(x) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \quad \text{où } x = \frac{p}{q} \end{cases}$$

$\Delta(p, q) = 1$ et $q > 0$. Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$.

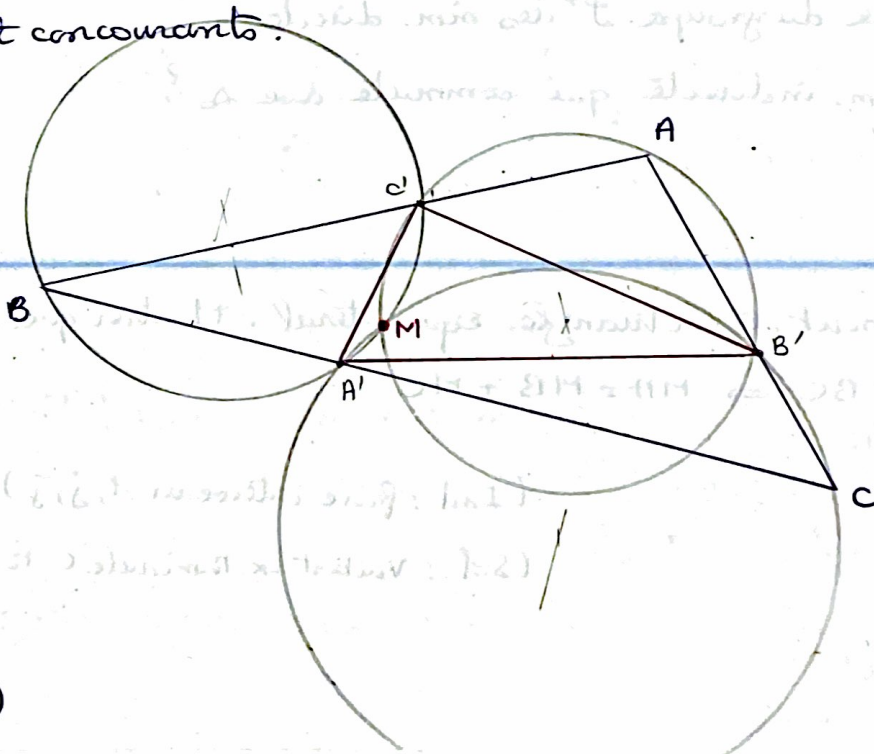
(Sol : cf I.39)

⑨ Même question qu'au n°8 pour $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & f(x) = 0 \\ x \in \mathbb{Q} & f(x) = \frac{1}{q} \cdot \frac{x-1}{x+1} \quad \text{où } x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N} \text{ et } \Delta(p, q) = 1 \end{cases}$$

⑩ Triangles, Concyclicité :

Soit ABC un triangle. Soient 3 points $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ tels que $A'B'C$, $A'BC'$ et $AB'C'$ ne soient pas alignés. On trace respectivement les cercles circonscrits aux triangles $A'B'C$, $A'BC'$ et $AB'C'$. Montrer que ces 3 cercles sont concourants.



(Sol : I.40)

EXERCICES DE PROBABILITES

(On a essayé de garder "la fraîcheur et la clarté"
des énoncés de l'oral du concours)

1 Soient A, B, C des événements tels que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$,
 $P(AB) = P(BC) = P(CA) = \frac{1}{9}$, $P(ABC) = 1/27$. Calculer $P(A \cup B \cup C)$
ainsi que la probabilité pour que 2 exactement des événements A, B, C sont
réalisés.

2 Si $P(A) + P(B) > 1$, alors A et B sont compatibles.

B.1

3 Deux urnes A et B . A contient 4 boules blanches, 2 rouges, 3 vertes,
et B contient 6 rouges. On extrait au hasard 3 boules de A que l'on met
dans B . Puis on extrait au hasard 3 boules de B . Quelle est la pro-
babilité pour que ce second tirage soit tricolore.

4 La variable aléatoire X est telle que $E(X) = 7$, $\text{var } X = 2$. En
utilisant l'inégalité de Tchebichef, déterminer le minimum possible de
 $P(3 < X < 11)$.

5 15 boules sont mises dans 5 urnes, à raison de 3 par urne. Quelle est la
probabilité pour que 2 boules déterminées se trouvent dans une même urne.

B.2

6 Dans une certaine ville, il y a 3 médecins. Quatre habitants malades appellent
au hasard un médecin. Quelle est la probabilité pour que les 4 malades
appellent le même médecin ? Quelle est la probabilité pour que les 3 médecins
soient appelés.

7 Un dé blanc et un dé rouge sont lancés simultanément, et soient A et B
les événements suivants $A = \{\text{le dé blanc montre le } 1\}$, $B = \{\text{la somme des}$
 $\text{points montre : } 7\}$. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$;
 A et B sont-ils indépendants ?

8

n nombres entiers positifs étant choisis au hasard (répétition possible) calculer P pour que le dernier chiffre de leur produit soit 5 (rép. : $(1/2)^n \{1 - (4/5)^n\}$).

9

On dispose de 3 jetons A, B, C tq. : A a 2 faces blanches ; B a une face blanche et une face noire ; C a deux faces noires. On tire un jeton au hasard et l'on ne voit qu'une de ses faces. Elle est blanche. Alors, quelle est la probabilité que l'autre face est blanche ?

10

Deux urnes renferment : la 1ère, 37 boules dont 3 blanches, la 2ème, 33 boules dont 4 blanches. On choisit au hasard une urne, et dans cette urne une boule. Alors $P\{\text{obtention d'une boule blanche}\} = 0,101\dots$

11

Une urne contient $(n-1)$ boules blanches et 1 boule noire ($n \geq 1$). On effectue des tirages exhaustifs (sans remise). On suppose qu'à chaque tirage chaque boule a autant de chance d'être tirée. On considère la variable aléatoire X qui vaut k ($1 \leq k \leq n$) si la boule noire est obtenue au k -ième tirage.

Etudiez la loi de X , son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

12

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, où Ω est un ensemble fini non vide. Une variable aléatoire réelle X prend les valeurs 1, 2, 3 et 6 avec la loi de probabilité suivante

$$P(X = n) = \frac{\lambda}{n} \quad (\lambda \in \mathbb{R}^{*+})$$

- 1) Calculez λ . Calculez l'espérance et la variance de X .
- 2) On considère la variable aléatoire $Y = (X - 3)^2$. Calculez le coefficient de corrélation de X et Y .

Oral

4.4.79

Feuille N° 11

I) Arithmétique

1) Résolve dans $\mathbb{Z}^*$ l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Montre que $x^4 + y^4 = z^2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^*$.

2) Résolve dans $\mathbb{Z}$ $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$.

3) Factorise le polynôme $12x^4 + x^3 + 15x^2 - 20x + 4$ sachant qu'il possède deux racines rationnelles.

4) Résolve dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - x + 1 = 0$. On suppose

(B.3)

p premier > 2 . Étudie dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ la suite $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$ ($u_0 \neq 0, 1$)

On montrera qu'elle est périodique, on calculera sa période, et on en déduira, selon les valeurs de p , le nombre des racines de $x^2 - x + 1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

5) Prouver que si a et b sont entiers $\frac{(2a)!(2b)!}{a!b!(a+b)!}$ l'est aussi.
 } [à savoir : $v_p(x!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x}{p^k} \right]$ et $\left[\frac{\frac{x}{a}}{p} \right] = \left[\frac{x}{ap} \right]$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{N}^*$]

6) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\{au + bv \mid u, v \in \mathbb{N}\}$ ait un complémentaire fini dans $\mathbb{N}$.

(I.41) 7) Pour quels entiers n les coefficients binomiaux $\binom{p}{n}$ sont-ils tous impairs ?

8) Calcule $S_m = \sum \frac{1}{pp'}$, où l'on somme sur les $(p, p') \in \mathbb{N}^2$ tels que $p < p' \leq m$, p et p' premiers entre eux et $p + p' > m$.

9) Résoudre en nombres entiers $x^3 + y^3 - xy \frac{t}{\mathbb{F}} = 0$ (Paramétriser la courbe $x^3 + y^3 - xy \frac{t}{\mathbb{F}} = 0$)

II) Descriptive

On donne, dans un espace affine euclidien de dimension 3 un plan Π et deux droites distinctes A et B dont aucune n'est perpendiculaire à Π . Montrez qu'il y a exactement une droite qui rencontre A et B et qui soit perpendiculaire à Π .

Effectuez les constructions en supposant A et B données - chacune par ses projections horizontale et verticale et le plan Π donné par les traces. ($\Pi \nparallel A \neq B \quad \bar{A} \neq \bar{B} \quad A \nperp \Pi \quad B \nperp \Pi$)

III) Mesclun

(B.10) x 1) Étudier et construire la courbe d'équation $x = \cos t$, $y = \cos 3t \quad t \in \mathbb{R}$. Trouver son équation cartésienne. Généraliser à $x = \cos t$, $y = \cos nt$.

2) Un mobile décrit une parabole d'équation $y^2 = 2px$. L'extrémité V du vecteur vitesse $\vec{MV}$ décrit une parabole $y^2 = 2qx$. Equation horaire du mouvement.

x 3) Calculer explicitement le terme général de la suite ainsi définie : $u_n = a u_{n-1} + b$, a donné.

Chercher à quelles conditions deux termes de rang distincts de la suite sont égaux. Montrer que ces conditions étant remplies, la suite est périodique.

(facile)

Feuille 11 Capes oral SVT
(2)

4.4.79

(11) Formule des accroissements finis généralisée.

Soient f et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et vérifiant : $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ et $g(b) - g(a) \neq 0$

Alors : $\exists c \in]a, b[\quad / \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

(Ind : Appliquer le th. Rolle à la fonction $h(x) = \det \begin{pmatrix} f(a) & f(b) & f'(x) \\ g(a) & g(b) & g'(x) \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$)

(12) Trouver toutes les fcts f dérivables et qui vérifient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

(Sol :

(13) Montrer que si a et b sont entiers, $\frac{(2a)!(2b)!}{a!b!(a+b)!} \in \mathbb{N}$

(Ind : 1^{ère} méthode : $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right]$ se démontre en écrivant que

$$1 \dots p \dots 2p \dots \left[\frac{x}{p} \right] p \dots x \quad \text{d'où} \quad v_p(n!) = \left[\frac{n}{p} \right] + v_p\left(\left[\frac{n}{p} \right]!\right).$$

Alors on utilise que si $y \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{N} \Leftrightarrow v_p(y) \geq 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}$. On utilise aussi la formule $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{N}^* \quad \left[\frac{x}{a} \right] = \left[\frac{\left[\frac{x}{a} \right]}{a} \right]$, 2^{ème} méthode (Nomas); on remarque que

$N(a+1, b) + N(a, b+1) = 4N(a, b)$. On fait alors une récurrence avec la propriété $\beta(a) = \{ \forall y \in \mathbb{N} \quad N(a, y) \in \mathbb{N} \}$

(14) Calculer $\sum_{k=0}^n k^2$

(Ind : 1^{ère} méthode : considérer $T : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]; P \mapsto T(P) / T(P)(x) = P(x+1) - P(x)$

T surj. $\Rightarrow \exists ! P / P(x+1) - P(x) = x^2$. 2^{ème} méthode : $(1+k)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$.

Sol : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

(15) Dans le plan affine euclidien E , soit ABC un triangle quelconque.

On construit les 3 triangles équilatéraux $BC\alpha$, $AC\beta$, $AB\gamma$ à l'extérieur

du triangle $\triangle ABC$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles $AB\gamma$, $A\beta C$ et αBC sont concourants.

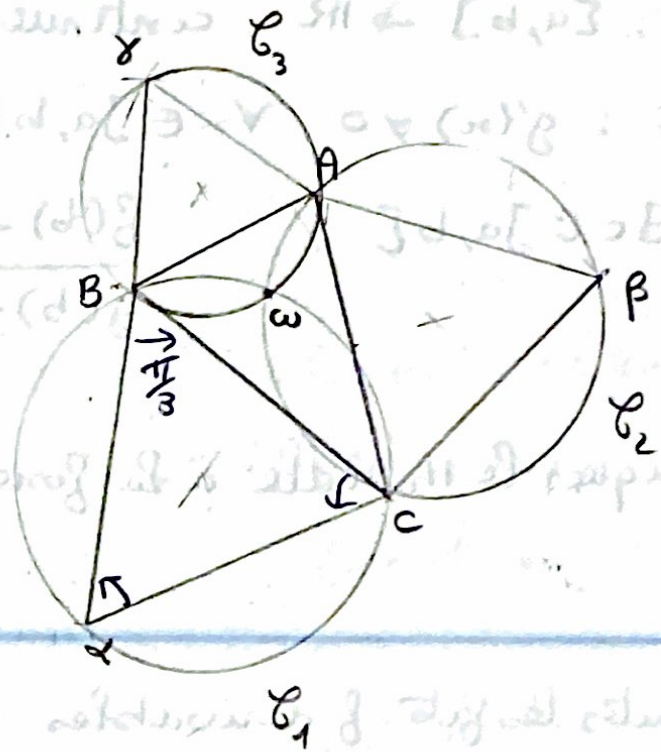
(Ind : Remarquer que $r_{(A, \frac{\pi}{3})} : \gamma \mapsto \beta$, $C \mapsto \beta$

d'où $\text{mes}(\widehat{\gamma C}, \widehat{B\beta}) = \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$ etc...

Soit $\omega = (C\gamma) \cap (B\beta)$. Alors $\omega \in \mathcal{C}_1$

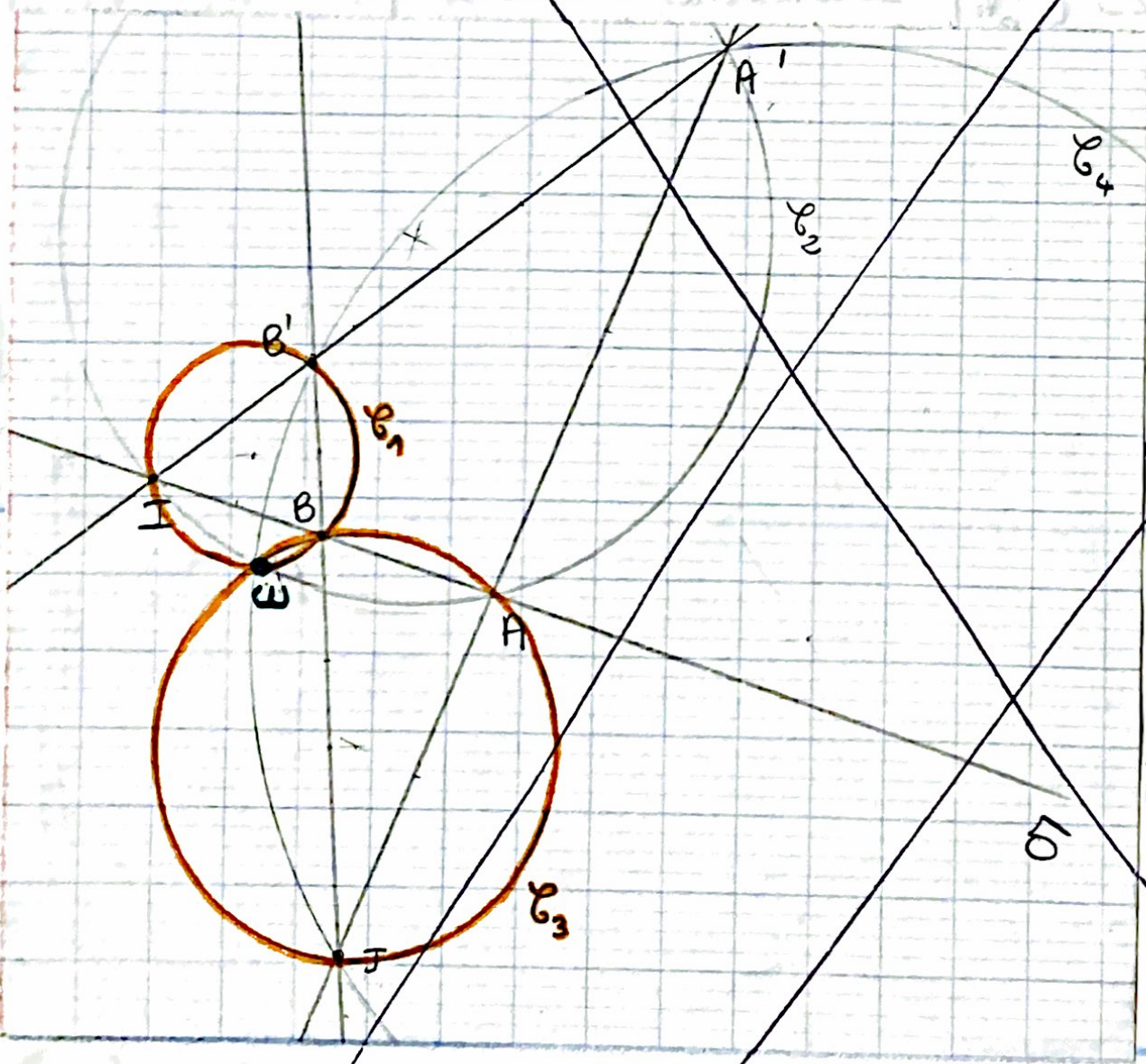
car $(\widehat{\omega B}, \widehat{\omega C}) = (\widehat{B\beta}, \widehat{C\gamma}) = -\frac{\pi}{3} = (\widehat{\alpha B}, \widehat{\alpha C})$

Finalement on montre que $\omega \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$)



⑩ Point de Miquel : Soit un quadrilatère complet $AA'B'B$. On note $I = (A'B') \cap (AB)$ et $J = (BB') \cap (AA')$. On suppose tous ces points distincts deux à deux.

Montrer que les cercles contenant respectivement $\{I, A, A'\}$, $\{I, B, B'\}$, $\{J, A, B\}$, $\{J, A', B'\}$ ont comme intersection un singleton.



(sol : on utilise le critère de cyclicité en termes d'angles de droites.

* $\omega \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \Rightarrow \omega \in \mathcal{C}_1$

$(\omega B, \omega I) = (B\omega, BJ) + (BB', B'I) + (B'I, \omega I)$

et

$(B\omega, BJ) = (A\omega, AJ) \pmod{\pi}$

$(B'I, \omega I) = (IA', I\omega) = (AA', A\omega) \pmod{\pi}$

d'où

$(\omega B, \omega I) = (B'B, B'I)$

$\Updownarrow$

$\omega \in \mathcal{C}_1$

* On montre de m que $\omega \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \Rightarrow \omega \in \mathcal{C}_4$.)

Feuille N°12

- 1° Résolve dans $\mathbb{N}^*$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
- 2° Montre que $n \in \mathbb{N}^*$ est impair si et seulement si $n \mid \sum_{i=1}^n i^n$.
- 3° Résolve dans $\mathbb{N}$ $x + y + z = xyz$.
- 4° Résolve $p(p+1) + q(q+1) = n(n+1)$ avec $p, q, n \in \mathbb{N}$, p et q premiers.
- 5° Trouver le terme maximal de $(a+b)^n$.
- 6° Donner une CNS sur trois nombres complexes a, b, c pour que le triangle ABC soit équilatéral.
- 7° Calculer la somme $\sum_{1 \leq i \leq n} z_i^m$ où les z_i sont les racines de $z^m - 1 = 0$
- 8° Trouver $P \in \mathbb{R}[x]$ avec $P(x^2) = P(x)P(x+1)$
- 9° Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\forall x \quad P(x) > 0$; montrer

qu'il existe $R, S \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant $P = R^2 + S^2$.

10^o Déterminer tous les nombres de deux chiffres (système décimal) qui sont divisibles par le produit de leurs chiffres.

11^o Dédurre du théorème de Wilson que si p premier et $p \equiv 1 (4)$ il existe un x tel que $x^2 + 1 \equiv 0 (p)$

12^o Trouver 5 entiers naturels a, b, c, d, e de raison q tels que a et q soient premiers entre eux et tels que :

$$bcde - aq^{10} = 6q^{11}.$$

Trouver $n = 2^\alpha 3^\beta$ avec α et β appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $12n$ ait deux fois plus de diviseurs que n .

13^o Déterminer a et b tels que : $m = \text{ppcm}(a, b)$
 $d = \text{pgcd}(a, b)$ et $m + 10d = 203$.

14^o Discuter et résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^5 = z - \bar{z}$.

_____ (Copier sur site)

Exercices

1°/ On se ramène à $\Delta(x, y, z) = 1$ et $z(x+y) = xy$. On trouve $z = x'y'$; $x = x'(n'+y')$; $y = y'(x'+y')$ où $\Delta(x', y') = 1$

2°/ ($\Rightarrow$) grouper $(n-k)^n + k^n \equiv 0 \pmod{n}$

($\Leftarrow$) Si $n = 2p$, posons $n = 2^{\alpha} p$ où p impair. i pair $\Rightarrow i^n \equiv 0 \pmod{2^{\alpha}}$

i impair $\Rightarrow i^n \equiv 1 \pmod{2^{\alpha}}$ (cf. Euler $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$) d'où $\sum_{i=1}^n i^n \equiv 2^{\alpha-1} p \pmod{2^{\alpha}}$
Dans tous les cas $2^{\alpha} p \nmid \sum_{i=1}^n i^n$

3°/ $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$, au moins l'un des termes est supérieur ou égal à $\frac{1}{3}$.

4°/ $p(p+1) = (n-q)(n+q+1)$ 1) Si $p \mid n-q$ $\begin{cases} n-q = \lambda p \\ p+1 = \lambda(n+q+1) \end{cases}$

d'où $\varphi(\lambda) = \mu(1-\lambda^2) + \lambda = 2q+1$. On étudie φ et l'on ne trouve pas de solution. 2) $p \mid n+q+1$... etc.

(Sol: $(p, q, n) \in \{(3, 5, 6); (5, 3, 6); (2, 2, 3)\}$)

10° Sol: $\{11, 12, 24, 36, 15\}$

I Exercices - Problèmes

du 1.11.78 I
 au

(1.11.78)

$$① \quad \Delta(a, b) = \delta \Leftrightarrow a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z}$$

Montrer que

$$\Delta(a, b) = 1 \text{ (c.à.d. } a \text{ et } b \text{ premiers entre eux)} \Leftrightarrow \exists \tilde{u} \in \mathbb{Z} \quad \exists \tilde{v} \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a\tilde{u} + b\tilde{v} = 1$$

$$② \quad \mu(a, b) = ab \xrightarrow{\text{Soit}} \Delta(a, b) = 1 \xrightarrow{?}$$

($\Leftarrow$) Soit p un multiple de a et de b . On suppose que $\Delta(a, b) = 1$

$$\begin{cases} p = ka \\ p = k'b \end{cases} \Rightarrow ka = k'b \Rightarrow a \mid k'b \xRightarrow{\text{(th. Gauss)}} a \mid k'$$

$$\text{donc } \exists k'' \mid k' = ak''$$

$$\text{et } p = abk'' \quad (1)$$

Le ppcm s'obtiendra pour $k'' = 1$: $\mu(a, b) = ab$.

($\Rightarrow$)

$\Rightarrow$ provient de la formule $a, b \in \mathbb{N} \quad \mu(a, b) \Delta(a, b) = ab$

$$\text{Preuve : } \begin{cases} \Delta(a, b) = \delta \\ \mu(a, b) = \mu \end{cases}$$

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z}$$

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$$

$$\Delta(a, b) = 1 \Rightarrow \mu(a, b) = ab \text{ (ci-dessus)}$$

$$a \quad \Delta\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = 1 \Rightarrow \underbrace{\mu\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right)}_{\mu(a, b)} = \frac{ab}{\delta^2} \Rightarrow \mu\delta = ab. \quad \text{oui.}$$

" $\frac{\mu(a, b)}{\delta}$ (le montrer)

(3) Soit β une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E (ou $\mathbb{R}$)

[resp. une forme hermitienne sur E , c.v. sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$]

Par définition :

β est "définie" si « ~~$\forall$~~ $\beta(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$ »

β est "non dégénérée" si « $\{u\}^\perp = E \Rightarrow u = 0$ »

Montrer que l'on a toujours :

β définie $\Rightarrow \beta$ non dégénérée (1)

Mais que la réciproque n'est vraie que si β est supposée positive (c.à.d. $\forall u \in E \quad \beta(u, u) \geq 0$)

⚡ $\beta(x, y) = 0 \quad \forall y \in E \Rightarrow$ en particulier $\beta(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

(1) est démontrée

Supposons β positive $\Rightarrow$ formule de Cauchy-Schwarz $|\beta(x, y)|^2 \leq \beta(x, x) \beta(y, y)$

Alors montrons que β non dégénérée $\Rightarrow \beta$ définie.

Soit $u \in E / \beta(u, u) = 0$

$\forall v \in E \quad |\beta(u, v)|^2 \leq \underbrace{\beta(u, u)}_0 \beta(v, v) = 0 \quad (\text{cf. CS})$

donc $\forall v \in E \quad \beta(u, v) = 0 \Rightarrow \{u\}^\perp = E \Rightarrow u = 0$ (car β non dégénérée)

(4) Soit β un produit scalaire sur E (c.v. sur $\mathbb{R}$).

Alors nous avons l'identité du parallélogramme pour la norme associée à ce produit scalaire : (P) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

Inversement, si une norme $\|\cdot\|$ donnée sur E vérifie (P), est-elle une norme associée à un produit scalaire ?

5) Chercher les fonctions continues, solutions de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue} \\ \text{et} \\ f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$y=x \Rightarrow f(2x)f(0) = [f(x)]^4 \quad (2)$$

$$y=0 \Rightarrow [f(x)]^2 = [f(x)]^2 [f(0)]^2 \quad (3)$$

$$x=0 \Rightarrow f(y)f(-y) = [f(0)]^2 [f(y)]^2 \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow f(x)^2 (f(0)^2 - 1) = 0$$

de 2 choses l'une :

$$(1) \exists x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$$

~~$$\text{Alors } f(0)^2 = 1 \Rightarrow f(0) = \pm 1 = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1)$$~~

$$(2) \text{ donne } f(2x)f(0) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow f(0) = 0 \text{ et } (3) \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \boxed{f=0} \\ \searrow f(0) \neq 0 \text{ et alors } f(2x) = 0 \end{array}$$

et de proche en proche : (cf (2))

$$f(2^k x) = 0$$

$$(2) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad f\left(\frac{x}{2^k}\right) = 0$$

f continue $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow$ en désaccord avec $f(0) \neq 0$. Absurde.

$$(2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$$

$$\text{Alors } f(0)^2 = 1 \Rightarrow f(0) = \pm 1 = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$(2) \Rightarrow \varepsilon f(2x) = f(x)^4$$

$$f(2x) = \varepsilon f(x)^4$$

$$\text{Ainsi } \begin{cases} f(0) = \varepsilon \\ f(2x) = \varepsilon f(x)^4 \\ f(-y) = f(y) \quad (4) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow y = 2x \quad f(3x) f(-x) = (f(x) f(2x))^2$$

$$f(3x) = f(x) f(2x)^2 = f(x)^9 \quad y = 2 \times 4 + 1$$

$$y = nx \quad f((n+1)x) f(-(n-1)x) = f(x)^2 f(nx)^2$$

$$f((n+1)x) = \frac{f(x)^2 f(nx)^2}{f((n-1)x)} \quad (5)$$

Supposons par récurrence que $f(nx) = (f(x))^{n^2}$.

* vrai pour $n=2$ et 3

* vrai pour $k \in \mathbb{N}$. Alors (5) donne

$$f((n+1)x) = \frac{f(x)^2 f(nx)^2}{(f(x))^{(n-1)^2}} = f(x)^{2+2n^2-(n-1)^2} = f(x)^{(n+1)^2} \quad \text{oui.}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(nx) = (f(x))^{n^2} \quad (I) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Remarque : Comme (4) : $f(-y) = f(y)$, on aura $f(nx) = (f(x))^{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*$

Recherche de f sur $\frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} \quad \text{cf (I)}$$

$$\text{d'où } f\left(\frac{1}{n}\right) = (f(1))^{\frac{1}{n^2}} \quad (6)$$

$$\text{De (I) et de (6) on tire que } f(k) = (f(1))^{k^2} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall k = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi

$$f(nx) = (f(x))^{n^2} \quad (I)$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (f(1))^{\frac{1}{n^2}} \quad (II)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

[(II) $\Rightarrow$ par continuité $f(0) = 1 \Rightarrow \varepsilon = 1$.]

$$\text{Soient } p, q \in \mathbb{N} \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^{p^2} = \left(f(1)^{\frac{1}{q^2}}\right)^{p^2} = f(1)^{\frac{p^2}{q^2}}$$

~~$\forall x \in \mathbb{Q}$~~

$$\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{Q} \quad f(x) = (f(1))^{x^2}$$

On connaît f sur les rationnels. On sait que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

On connaît la fonction $x \mapsto a^{x^2}$, qui est continue sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Th. de l'opologie

Soit $A \subseteq E$ c.t.

Soient f et g deux fonctions continues sur E .

$$\text{Alors} \quad f = g \text{ sur } A \Rightarrow f = g \text{ sur } E$$

Ici : $f = \{x \mapsto (f(1))^{x^2}\}$ sur $\mathbb{Q}$ et f et $\{x \mapsto (f(1))^{x^2}\}$ sont continues sur $\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = (f(1))^{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(NB : ~~$f(1) \geq 0$ pour que $[f(1)]^{x^2}$ puisse être définie.~~)

~~Soit $f(1) = 0$~~

Ainsi

$$f(1) = a \geq 0 \quad f(x) = a^{x^2}$$

Remarque

f ne peut pas prendre 2 signes différents : ~~soit~~ ^{en effet}, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

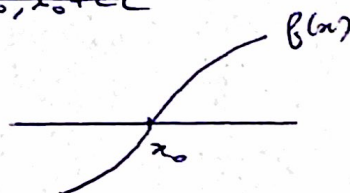
~~Si on $\exists x_0 / f(x) < 0$ pour $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0[$~~

~~$\exists \varepsilon > 0 \quad f(x) > 0$ pour $x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$~~

$$\text{et (1)} \Rightarrow f(x_0 + y) f(x_0 - y) = (f(x_0) f(y))^2$$

$\Rightarrow$ du m même signe à droite et à gauche de x_0 .

De plus, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$ car $f(0) = 1 > 0$.



(Prolongement du (5))

⑥ Densité des nombres diadiques dans $\mathbb{R}$.

$$D = \left\{ \frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\} = \text{ensemble des nombres diadiques.}$$

Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

Rappel: division euclidienne:

$$\exists q', n' \geq 0 \mid a = q'd + n' \quad 0 \leq n' < d \quad (1)$$

On peut donner "une autre division":

$$\exists q \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{Z} \mid a = qd + n \quad \text{avec } |n| \leq \frac{d}{2} \quad (2)$$

En effet, regardons (1).

* Si $n' \leq \frac{d}{2}$, c'est fini.

* Si $n' > \frac{d}{2}$, on a $a = \underbrace{(q'+1)}_q d + \underbrace{n'-d}_n$

$$\text{et } \frac{d}{2} \leq n' < d \Rightarrow -\frac{d}{2} < \underbrace{n'-d}_n < 0 \Rightarrow |n| < \frac{d}{2}$$

Exo:

Nous allons montrer que D est dense dans $\mathbb{Q}$ (car $\overline{D} = \mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \overline{D} = \mathbb{R}$)

? $\exists a \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N} \exists p, q \in \mathbb{Z} \text{ tels que } \left| \frac{a}{2^n} - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon \quad (I)$
(ε donné)

$$\exists N \mid \varepsilon > \frac{1}{N}$$

Si $\left| \frac{a}{2^n} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{N}$, alors (I) est vraie

$$-\frac{1}{N} < \frac{a}{2^n} - \frac{p}{q} < \frac{1}{N}$$

$$-\frac{1}{N} + \frac{p}{q} < \frac{a}{2^n} < \frac{1}{N} + \frac{p}{q} = \frac{q + Np}{Nq} \Rightarrow$$
$$\frac{Np - q}{Nq}$$

$\varepsilon > 0$ donné

$p, q \in \mathbb{Z}$ donnés

On cherche $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\left| \frac{a}{2^n} - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow |2^n p - a q| < 2^n \varepsilon |q|$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad / \quad \frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon$$

Prendons ce n . Alors (2) $\Rightarrow$ (1)

$$\text{où (2): } |2^n p - a q| < \frac{|q|}{2}$$

Divisons $2^n p$ par q suivant la division euclidienne au rappel (2):

$$\begin{aligned} \exists a \in \mathbb{N} \\ \exists r \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad \text{tels que} \quad 2^n p = a q + r \quad \text{où} \quad |r| < \frac{|q|}{2}$$

$$\text{c.à.d.} \quad \exists a \in \mathbb{N} \quad / \quad |2^n p - a q| < \frac{|q|}{2}$$

CQFD

Remarque: Ainsi nous possédons un autre ensemble dense dans $\mathbb{R}$: à savoir $\mathbb{D}$. Cela peut servir ---

I.

⑦ Caractériser les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $u^3 = \text{Id}$

(ref Achache-Richard - M. du Capes)

$$\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3 = \text{e.v. sur } \mathbb{C}$$

Considérons $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, de matrice M réelle.

$$u^3 = \text{Id}$$

$$X^3 - 1 = 0$$

$$(X-1)(X-j)(X-\bar{j}) = 0$$

On utilise le lemme de décomposition par blocs (voir cours). $Q_1 = X-1$ $Q_2 = X-j$
 $Q_3 = X-\bar{j}$ sont premiers entre eux 2 à 2, et $Q_1 Q_2 Q_3(u) = 0$.

Donc :

$$1) u(\text{Ker } Q_i(u)) \subset \text{Ker } Q_i(u) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

$$2) E = \mathbb{C}^3 = \text{Ker } Q_1(u) \oplus \text{Ker } Q_2(u) \oplus \text{Ker } Q_3(u)$$

$$\text{Donc } E = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - j\text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - \bar{j}\text{Id})$$

La matrice M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Dans une base convenable de $\mathbb{C}^3$, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha, \beta, \gamma \in \{1, j, j^2\}$$

Mais on veut que u , endomorphisme de $\mathbb{C}^3$, soit un endomorphisme réel, c.à.d tel que $u(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$.

Il faut que la trace de toute matrice représentant u (trace qui lui est intrinsèque) soit réelle. En effet :

$$\begin{cases} \exists M \text{ réelle représentant } u \\ \exists M', \text{ complexe diagonale représentant } u \end{cases} \quad \text{alors } M = P^{-1} M' P$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\det M}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{\det M'}_{\in \mathbb{C}} = \prod \lambda_i$$

$$\text{On devra donc avoir } \alpha + \beta + \gamma \in \mathbb{R} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{1, j, \bar{j}\}$$

Cela ne nous laisse que 2 choix possibles:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & \bar{i} \end{pmatrix}$$

cherchons une matrice réelle semblable à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \bar{i} \end{pmatrix}$, dans $M_2(\mathbb{C}^*)$

Lemme : $E_\lambda =$ e.v. propre associé à la λ pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Alors $E_{\bar{\lambda}} = \overline{E_\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$

Preuve :

$$x \in E_\lambda \Leftrightarrow u(x) = \lambda x \Leftrightarrow \overline{u(x)} = \overline{\lambda x} \Leftrightarrow u(\bar{x}) = \bar{\lambda} \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} \in \overline{E_\lambda}$$

$\uparrow$
Mat(u) est réelle

Ainsi une base de $\mathbb{C}^2$ est $(e_1, \bar{e}_1)$ et $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \bar{i} \end{pmatrix} = \text{mat}(u)_{\text{base}(e_1, \bar{e}_1)}$

Posons $\begin{cases} b_1 = e_1 + \bar{e}_1 \\ b_2 = e_1 - \bar{e}_1 \end{cases} \quad (b_1, b_2) = \text{base de } \mathbb{C}^2 \text{ (e.v. sur } \mathbb{C})$

De plus $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$ et nous allons voir que $\text{mat}(u)_{\text{base}(b_1, b_2)}$ a tous ses coefficients réels ! (le démontrer ds le cas général de $E_\lambda, E_{\bar{\lambda}}$!)

$P =$ matrice de passage de $(e_1, \bar{e}_1)$ vers (b_1, b_2)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où, si $M =$ matrice de u dans (e_1, e_2)

$$M' = \text{ " " " } (b_1, b_2)$$

$$M' = P^{-1} M P = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \bar{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$M' = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i\delta & i\bar{\delta} \\ -\delta & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i(\delta + \bar{\delta}) & \delta - \bar{\delta} \\ -\delta + \bar{\delta} & i(\delta + \bar{\delta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \delta & \operatorname{Im} \delta \\ -\operatorname{Im} \delta & \operatorname{Re} \delta \end{pmatrix}$$

Comme $\delta = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$M' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En conclusion : $u^3 = I$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ soit la matrice de u est semblable à l'une des matrices suivantes :

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

matrice de la rotation vect. d'axe Δ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Remarque : Dans $\mathbb{C}^3$, il y a toutes les matrices semblables à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

⑧ Étude de $y = \sin x + \frac{1}{4 \sin x}$ $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Application : Un triangle dans lequel $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$ est équilatéral.

• Étude de $y = \sin x + \frac{1}{4 \sin x}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

y est une fonction continue, et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

$$y'(x) = \cos x - \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \cos x \left(\frac{4 \sin^2 x - 1}{4 \sin^2 x} \right)$$

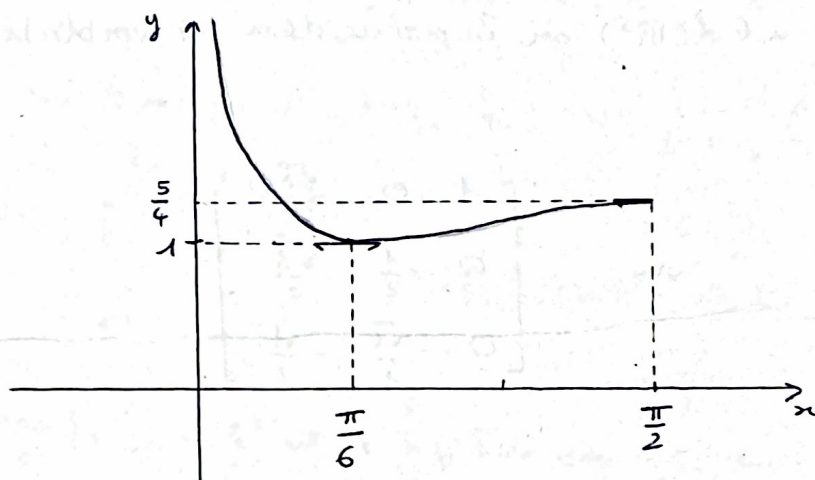
$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x (4 \sin^2 x - 1) = 0 \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2} \quad \text{et } x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad (\text{sur }]0, \frac{\pi}{2}[)$$

Pour $0 < x \leq \frac{\pi}{6}$, nous avons $\sin x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow y'(x) \leq 0$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
y'		-	0
y	$+\infty$	1	$\frac{5}{4}$



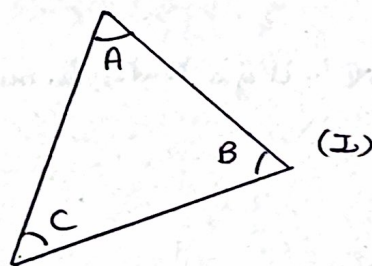
$$y = \sin x + \frac{1}{4 \sin x}$$

$$x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

• Application :

Supposons que :

$$(1) \quad \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$$



Dans le triangle (I), nous avons la relation d'où

$$C = \pi - (A + B) \quad (1')$$

$$(1) \quad \cos A + \cos B - \cos(A + B) = \frac{3}{2}$$

Considérons B comme un paramètre et A comme une variable : $A = x$.

$$(1') \quad \cos x - \cos(x + B) + \cos B - \frac{3}{2} = 0$$

Nous sommes amenés à résoudre (1'), où x est l'inconnue.

Prouvons $\varphi(x) = \cos x - \cos(x+B) + \cos B - \frac{3}{2}$

C'est une fct dérivable sur $]0, \pi[$, et :

$$\varphi'(x) = -\sin x + \sin(x+B)$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin(x+B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv x+B \quad [2\pi] \\ x \equiv \pi - (x+B) \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B \equiv 0 \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv \pi - B \quad [2\pi] \end{cases}$$

On suppose que $B \neq k2\pi$ (sinon, notre triangle serait plat)

(De toutes façons, si $B = 0 \quad [2\pi] \quad (1) \Rightarrow \cancel{\cos A} - \cancel{\cos A} + 1 = \frac{3}{2}$ faux !)

Ainsi $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \equiv \pi - B \quad [2\pi]$

c.à.d $2x = \pi - B + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi - B}{2} + k\pi$$

On a la condition : $x \in]0, \pi[\Rightarrow 0 < \frac{\pi - B}{2} + k\pi < \pi$

$$\frac{B - \pi}{2} < k\pi < \pi + \frac{B - \pi}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{B}{2\pi} - \frac{1}{2} < k < 1 + \frac{B}{2\pi} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{B}{2\pi} < 1$$

La seule possibilité à envisager est que $k=0$.

car $B \in]0, \pi[$

Ainsi, sur $]0, \pi[$: $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi - B}{2}$

$$0 < x \leq \frac{\pi - B}{2} \Rightarrow \text{Sgn } \varphi'(x) = \text{Sgn}(\sin(B)) > 0 \quad (\text{car } B \in]0, \pi[)$$

On obtient le tableau de variation :

x	0	$\frac{\pi - B}{2}$	π
$\varphi'(x)$		+	-
$\varphi(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\varphi\left(\frac{\pi - B}{2}\right)$	$2\cos B - \frac{3}{2} \left(< -\frac{1}{2}\right)$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \cos B - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right) - \frac{3}{2}$$

$$= \sin \frac{B}{2} + \cos B + \sin \frac{B}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{B}{2} - \frac{3}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{B}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) = 2 \sin \frac{B}{2} - 2 \sin^2 \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \quad (2)$$

• Nous cherchons les solutions de $\varphi(x)=0$, pour B paramètre, $B \in]0, \pi[$.

Le sens de variation de φ nous montre qu'il n'existera de solution que si

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) \geq 0$$

$$\text{Or } 2 \sin \frac{B}{2} - 2 \sin^2 \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 \frac{B}{2} - \frac{1}{4 \sin \frac{B}{2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{B}{2} + \frac{1}{4 \sin \frac{B}{2}} \leq 1 \quad \left(\begin{array}{l} \sin \frac{B}{2} \neq 0 \\ > 0 \end{array} \right) \quad (3)$$

Or (3) n'a lieu que si $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{6}$ (voir l'étude de la fonction $y(x) = \sin x + \frac{1}{4 \sin x}$)

$\Uparrow$

$B = \frac{\pi}{3}$ et alors on a l'égalité $\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) = 0$.

Mais alors $\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) = 0$ seulement en ce point (voir 2^e tableau de variation).

" $\varphi(x)=0$ n'admet de solution que si $B = \frac{\pi}{3}$.

La racine de $\varphi(x)=0$ est alors $x = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

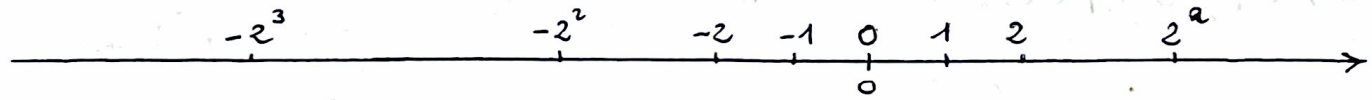
$$(1) \text{ donne : } C = \pi - (A+B) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

On a bien montré que :

$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2} \Rightarrow A=B=C = \frac{\pi}{3}$ $A, B, C = \text{angles d'un triangle} \quad (\text{le triangle est équilatéral})$
--

⑨ Montrer que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifie

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \quad , \text{ alors } f \text{ est affine.}$$



Posons $E_1 = \{\dots, -2^m, \dots, -1, 0, 1, \dots, 2^n, \dots\}$ et $\begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = b \end{cases}$

1° Gn a: $\forall x \in E_1 \quad f(x) = (b-a)x + a$ (2)

En effet: (1) $\Rightarrow f(y) = 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) - f(x)$

• Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(2^n) = (b-a)2^n + a$ par récurrence

La propriété est vraie pour $n=1$. Supposons la vraie au rang n , et montrons la pour $n+1$:

$$(1) \Rightarrow f(2^{n+1}) = 2f(2^n) - a$$

$$\Rightarrow (\text{hyp. réc.}) \quad f(2^{n+1}) = (b-a)2^{n+1} + a \quad \text{oui.}$$

• Gn fait de même pour $f(2^{-m})$ ($\forall m \in \mathbb{N}$)

$$\left[\begin{array}{l} 2^\circ \text{ Gn définit } E_i = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists \alpha, \beta \in E_{i-1}, x = \frac{\alpha + \beta}{2} \right\} \quad (i \geq 1) \\ \text{Alors } f(x) = (b-a)x + a \text{ sur } E_i \end{array} \right.$$

Par récurrence sur i :

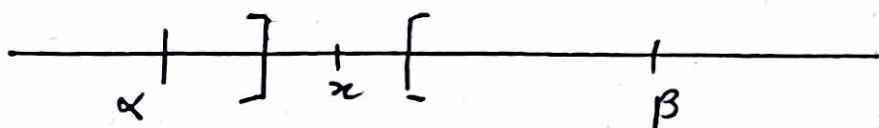
* vrai pour $i=1$

* vrai pour $i \Rightarrow$ vrai pour $i+1$?

Soit $x \in E_{i+1} \quad \exists \alpha, \beta \in E_i \quad / \quad x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

$$\text{Alors } f(x) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(\beta)) = (b-a)x + a \quad \text{oui.}$$

$$\left[\begin{array}{l} 3^\circ \quad f(x) = (b-a)x + a \text{ sur } E = \bigcup E_i \\ \text{et } E = \mathbb{R} \end{array} \right.$$



Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Soit $\varepsilon > 0$ fixé

- Si $x \in E_1$, c'est fini.
- Si $x \notin E_1$, $\exists \alpha, \beta \in E_1$ / $\alpha < x < \beta$

Prop 1 | $\forall \alpha, \beta \in E \quad \frac{\alpha + \beta}{2} \in E$

Preuve: $\alpha, \beta \in E \Rightarrow \exists i, i' / \begin{cases} \alpha \in E_i \\ \beta \in E_{i'} \end{cases}$

Or $\alpha \in E_i \Rightarrow \forall l \geq i \quad \alpha \in E_l$ (par récurrence)

De même pour β . Donc: $\exists i / \alpha, \beta \in E_i \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} \in E_{i+1} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$

cqfd

Prop 2 | $\alpha, \beta \in E$
 $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall h \in [0, 2^k] \quad \alpha + h \frac{\beta - \alpha}{2^k} \in E$

Preuve:

Par récurrence:

$P(k) = \ll \forall h \in [0, 2^k] \quad \alpha + h \frac{\beta - \alpha}{2^k} \in E \gg$

* vrai pour $k=0$

* $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

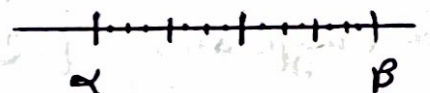
Considérons $A = \alpha + h \frac{\beta - \alpha}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \left(2\alpha + h \frac{\beta - \alpha}{2^k} \right)$ où $h \in [0, 2^{k+1}]$

De 2 choses l'une $\nearrow$ si $h \in [0, 2^k]$ $A = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\alpha + h \frac{\beta - \alpha}{2^k}}_{\in E} + \underbrace{\alpha}_{\in E} \right) \in E$ (Prop 1)

$\searrow$ si $h \in]2^k, 2^{k+1}[$ $A = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\alpha + \underbrace{(h - 2^k)}_{\in [0, 2^k]} \frac{\beta - \alpha}{2^k}}_{\in E} + \underbrace{\alpha + 2^k \frac{\beta - \alpha}{2^k}}_{\in E \text{ (hyp. réc.)}} \right)$
 $\Downarrow$
 $A \in E$ (cf Prop 1)

cqfd

idée: couper l'intervalle $[\alpha, \beta]$ en deux, et ainsi de suite



Montrer que toutes les extrémités de ces petits intervalles sont dans E

Pro 3 | Soient $x \in]\alpha, \beta[$ et $\varepsilon > 0$

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad \exists h \in [0, 2^k] \quad / \quad x + h \frac{\beta - \alpha}{2^k} \in B(x, \varepsilon)$$

(On aura ainsi démontré que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad E \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$)

Preuve.

Prendons $k / \frac{\beta - \alpha}{2^k} < \varepsilon$

Posons $a_h = x + h \frac{\beta - \alpha}{2^k}$

et $A = \{a_h / a_h \leq x\}$

$\exists \max A$ (car A majoré et $d(a_h, a_{h+1}) \geq \frac{\beta - \alpha}{2^k}$)

Posons $\max A = a_{h_0}$. Plus $d(x, a_{h_0}) < \varepsilon$, car sinon: $d(x, a_{h_0}) > \frac{\beta - \alpha}{2^k}$

et $\nexists a_h \in A / a_h > a_{h_0}$, ce qui est absurde puisque $a_{h_0} = \max A$.

cqfd

Ainsi $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = (b-a)x + a \quad \forall x \in E$.

f continue f est continue sur $\mathbb{R}$

$\Downarrow$

$f(x) = (b-a)x + a$ sur $\mathbb{R}$

On a démontré que $\{f \text{ solution de (1)}\} \Rightarrow f \text{ affine}$.

La réciproque est évidente.

Donc :

$$\{f \text{ solution de (1)}\} \Leftrightarrow f \text{ affine} \quad (f \text{ continue})$$

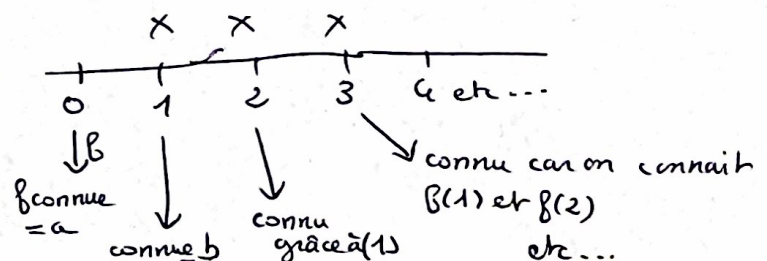
Remarque : Cette méthode est plus rapide :

Autre façon de procéder (plus rapide)

1) Trouver f sur $\mathbb{Z}$ (récurrence :

2) Trouver f sur les nombres dyadiques

$(D = \{\frac{n}{2^k}, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\})$ (facile)



Pour quelles valeurs de n le nombre C_n^k est-il impair, $\forall k \in [1, n]$.

n tel que $\forall k \quad v_2(C_n^k) = 0$ (v_2 = valuation diadique)

Or $v_2(C_n^k) = \nu$ (cf cours algèbre)

$$\frac{\alpha_2(n-k) - \alpha_2(k) - \alpha_2(n)}{2-1} = \text{nbre de retenues dans l'addition } (n-k) + k$$

(Rappel : $\alpha_2(a) = \sum a_i$ $a = \overline{a_p \dots a_0}$ (en base 2))

$$\begin{array}{r} \overline{a_p \dots a_0} \\ + \overline{b_p \dots b_0} \\ \hline c \end{array} \quad c_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } (a_0 = b_0 = 1) \text{ ou } (a_0 = b_0 = 0) \\ a_0 + b_0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{retenue } R \rightarrow \text{donc } \begin{cases} a_0 + b_0 - c_0 = 2 & \text{si } R ? \\ a_0 + b_0 - c_0 = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cel : il ne faut pas de retenues dans l'addition $(n-k) + k$ (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} n-k \\ k \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} \overline{a_p \dots 1 \dots a_0} \\ \overline{b_p \dots 1 \dots b_0} \\ \hline \end{array}$$

↑
mauvais, car occasionne une retenue.

(1) $\Leftrightarrow$ Il ne faut pas de retenues dans la soustraction $n - k$ (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} n \\ k \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} \overline{a_p \dots 1 \dots a_0} \\ \overline{b_p \dots 1 \dots b_0} \\ \hline \end{array}$$

(montrer que si il y a une retenue dans (1), alors il y en a pour (2) et inversement)

Donc $n = \overline{1 \dots 1}$ en base 2, c.à.d $n = \sum_{i=0}^{q-1} 2^i = 2^q - 1$ oui.

Etude des triangles de cercle circonscrit et de centre de gravité donnés.

En prenant un pt A, il faut que A' soit à l'int. du cercle.
 Connaissant O et G, on connaît H par $\vec{OH} = 3\vec{OG}$

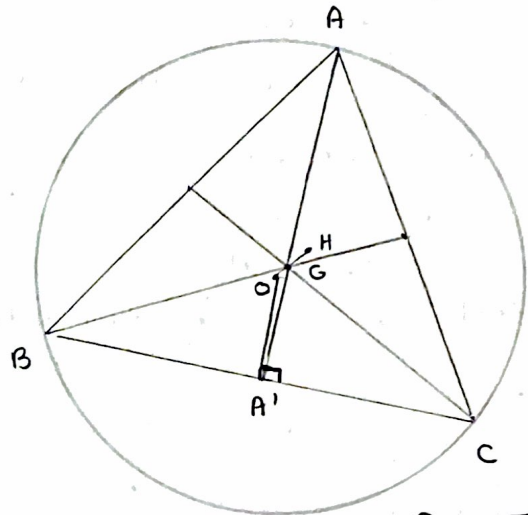
$$\vec{OH} = 3\vec{OG} = \vec{OB} + \vec{OA} + \vec{OC}$$

$$\vec{OH} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC} \Leftrightarrow \vec{AH} = \vec{OB} + \vec{OC}$$

$$\text{d'où } \|\vec{AH}\| = \|\vec{OB} + \vec{OC}\| \leq \|\vec{OB}\| + \|\vec{OC}\|$$

$$\|\vec{AH}\| \leq 2R$$

Trçons le cercle de centre H et de rayon $2R$. Le point A se trouve sur l'arc en bleu.



$$\vec{OH} = 3\vec{OG}$$

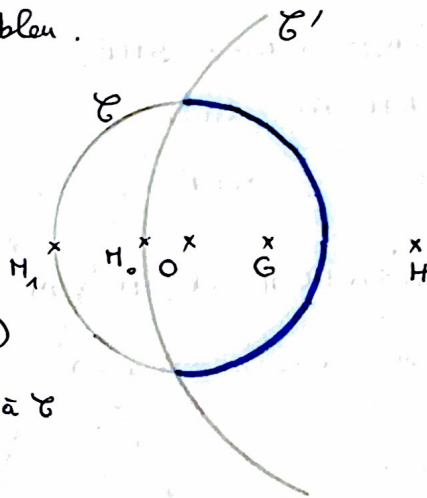
Réciproquement, soit A un point de l'arc en bleu.

Montrons que A' sera à l'intérieur du cercle initial $\mathcal{C}$.

Or $A' = H(A)$ où H est l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Or $\mathcal{C} = H(\mathcal{C}')$ car $O = H(H)$ et $R = \frac{1}{2}(2R)$

donc $A \in \text{arc de cercle}$, A' sera intérieur à $\mathcal{C}$



~~A = médiane issue~~
~~(G, A, A')~~
 $A' = H(A)$
 homothétie de
 centre G et de
 rapport $-\frac{1}{2}$

Mais l'arc de cercle bleu n'existe pas pour tout point G. Il faut et il suffit que les 2 cercles se rencontrent, c.à.d :

$$\|\vec{OH}\| \leq 2R + R = 3R \Leftrightarrow 3\|\vec{OG}\| \leq 3R \Leftrightarrow \|\vec{OG}\| \leq R$$

$\Rightarrow G$ est à l'intérieur du cercle

Remarque : Pour que tout point du cercle soit solution :

$$\Leftrightarrow \|\vec{OH}\| \leq 2R - R = R \Leftrightarrow \|\vec{OG}\| \leq \frac{R}{3} \quad (H_0 \text{ et } H_1 \text{ sont confondus})$$

Exo : $\mathcal{P}$ = ens. des nbres premiers > 0 .

Cet ensemble est dénombrable : $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ Démontrer la inégalité :
 $2^{n-1} \leq p_n < 2^{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) $2^{n-1} \leq p_n \quad (n \geq 1)$

Pour $n=1$: $p_1 = 2$ vrai.

Supposons que $2^{n-1} \leq p_n$, et essayons de montrer que $2^{n+1} \leq p_{n+1}$.

$$\underbrace{p_{n+1}}_{\text{pair}} < p_{n+1} \Rightarrow 2n < p_{n+1} \Rightarrow 2^{n+1} \leq p_{n+1} \quad \text{oui}$$

2) $p_n < 2^{2^n} \quad (\forall n \geq 1)$

Pour $n=1$: $p_1 = 2 < 2^2$ oui. Supposons l'inégalité vraie pour n .

Alors : $a = p_1 \dots p_{n+1}$ admet un diviseur q supérieur à p_n strictement.

Donc : $p_{n+1} \leq q \leq a < \underbrace{2^2 2^2 \dots 2^2}_{2^{(2^{n+1}-2)}} + 1$

$$\text{d'où } p_{n+1} < 2^{(2^{n+1}-2)} + 1 < 2^{(2^{n+1}-2)} \times 4 = 2^{2^{n+1}} \Leftrightarrow p_{n+1} < 2^{2^{n+1}}$$

corré

Exo Montrez les implications :

- 1) Un corps est un anneau intègre
- 2) Un anneau intègre fini est un corps.

1) $(\mathbb{C}, +, \times)$ corps.

$$x, y \in \mathbb{C} \quad xy = 0$$

Si $x=0$ c'est fini.

Si $x \neq 0$, alors $\exists x^{-1}$ et $y=0$. donc $\mathbb{C}$ = anneau intègre.

(Mme Manotte)

2) $(A, +, \times)$ anneau fini, de cardinal n . (anneau unitaire)

Supposons qu'il soit intègre.

Considérons, pour $a \in A$ ($a \neq 0$), l'application $\varphi: A \longrightarrow A$
$$x \longmapsto ax$$

φ surjective $\Leftrightarrow \varphi$ injective.

facile   montrer, car: φ = morphisme de groupes additifs
(car $a(x+x') = ax + ax'$)

et $\text{Ker } \varphi = \{x \in A / ax = 0\}$ ~~fini~~

$ax = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $x = 0$. Comme $a \neq 0$, $x = 0$. Donc $\text{Ker } \varphi = \{0\} \Rightarrow \varphi$ injective.

Donc φ surjective (car on est en cardinal fini). Donc 1 est atteint pour $a' \in A$:

$$\forall a \in A \setminus \{0\} \quad \exists a' \in A \quad / \quad aa' = 1.$$

$(A, +, \times)$ est donc un corps.

CQFD

Remarque: Donner un contre-exemple pour démontrer l'implication:

Un anneau intègre ~~est~~ un corps. ?

Contre-exemple:

Exo

Calculer la variance de la var définie par

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ où } x_k = n + kq \quad (n, q) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{et où } p(X = x_k) = \frac{1}{n}$$

* Si $q = 0$, c'est facile : $E(X) = n$ et $V(X) = 0$.

* Si $q \neq 0$, on pose $Y = \frac{1}{q}(X - n)$. C'est une var sur Ω .

$$Y(\Omega) = \{1, \dots, n\} \text{ et } p(Y = k) = \frac{1}{n}$$

(:

$$\text{On a } V(Y) = \frac{1}{q^2} V(X) \quad (1)$$

$$\text{Calculons } V(Y) = V(Y^2) - [V(Y)]^2$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \frac{1}{n} - \left(\sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{n} \right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

$$\text{On connaît } \sum_{k=1}^n k = \frac{(1+n)n}{2}$$

$$\text{On connaît } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{(Rappel : } \begin{aligned} (1+0)^2 &= 1 \\ (1+k)^2 &= 1 + 2k + k^2 \end{aligned} \text{ vous vous en souvenez, n'est-ce pas?)}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } V(Y) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n} \frac{(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \left[\frac{2n+1}{3} - \frac{1}{n} \right] \\ &= \frac{n+1}{2} \left(\frac{2n^2 + n - 3}{3n} \right) \end{aligned}$$

$$V(Y) = \frac{n+1}{2} (2n^2 + n - 3)$$

$$\text{d'où : } V(X) = q^2 \frac{n+1}{6n} (2n^2 + n - 3) = \frac{q^2}{6n} (n^2 - 1)(2n + 3)$$

CQFD

Exo

Calculer la variance de la variable aléatoire réelle liée à la distribution binomiale.

(Sol) Soit X v.a.r. de la distribution binomiale.

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} \quad n \in \mathbb{N} \quad p(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{où } p+q=1 \\ \text{et } p, q \in \mathbb{R}_+$$

Calculer $V(X)$ directement. Supposons que $n \geq 2$. (sinon facile)

On a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$\text{Or } k C_n^k = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n C_{n-1}^{k-1}$$

$$\text{d'où } E(X) = \sum_{k=1}^n n C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$E(X) = np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{(n-1)-k} = np \underbrace{(p+q)^{n-1}}_1$$

$$\boxed{E(X) = np}$$

Cela étant, la formule de Koenig nous donne :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - \cancel{E(X)^2} + E(X) - (E(X))^2$$

$$= \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k p^k q^{n-k} + np - (np)^2$$

$$\text{et } k(k-1) C_n^k = k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}$$

$$V(X) = n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{k-2}{n-2} p^k q^{n-k} + np(1-np)$$

$$= n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^n \binom{k-2}{n-2} p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} + np(1-np)$$

$$= np^2(n-1) \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{k'}{n-2} p^{k'} q^{(n-2)-k'} + np(1-np)$$

$$= np^2(n-1) \underbrace{(p+q)}_1^{n-2} + np(1-np)$$

$$= np(p(n-1) + 1 - np) = np(1-p) = npq$$

☺

$$\boxed{V(X) = npq}$$

☺

Divisibilité : Exercices sur la divisibilité (ref. aléph p. 131)**EX01** Résoudre l'équation dans $\mathbb{N}$: $x^y = y^x$ **EX02** Montrer que, pour $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$: $x^2 + 5y^2 = 2(z^2 + 5t^2) \Leftrightarrow x=y=z=t=0$ **EX03** Résoudre dans $\mathbb{N}$: $x^2 + y^3 = y^6$ **EX01** (1) $x^y = y^x$ $x, y \in \mathbb{N}$ Supposons que $x \geq y > 0$, et notons v_p la fct "valuation p -adique".

On a : $x^y = y^y \cdot y^{x-y} \Leftrightarrow y^y \mid x^y$

Donc $v_p(y^y) \leq v_p(x^y) \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (\mathcal{P} = \text{nbres premiers positifs})$

$$\Leftrightarrow$$

$$v_p(y) \cdot y \leq v_p(x) \cdot y$$

$$\Downarrow$$

$$v_p(y) \leq v_p(x) \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y \mid x$$

Donc $\exists n \in \mathbb{N} / x = ny \quad (2)$

À résoudre :
$$\begin{cases} x^y = y^x & (1) \\ x = ny & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Pro | Si $n > 1$ et $y \geq 3$, le système (I) n'admet pas de solutions.

Preuve :

(1) $\Rightarrow x = y^{\frac{x}{y}} \Rightarrow x = y^n$ d'où (2) : $y^n = ny \Leftrightarrow y(y^{n-1} - n) = 0$ (car $n > 1$)

c.à.d $y = 0$ ou $y^{n-1} = n$.

Mais $y \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ \text{et} \\ y^{n-1} > n \end{cases}$ (montrer le lemme : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^{n-1} > n$)

CQFD

Considérons $y < 3$ ou $n = 1$

* Si $n = 1$, ça marche et $y = x$

* Si $n \neq 1$, pour qu'il y ait des solutions, il faut que $y < 3$, c.à.d que $y = 1$ ou 2 .

• $y = 1$ (1) : $x = 1 \Rightarrow$ absurde car $n \neq 1$

• $y = 2$
$$\begin{cases} x^2 = 2^x \\ x = 2n \end{cases} \quad (II)$$

qu'il nous faut résoudre.

(II) :
$$\begin{cases} x = 2^n \\ 2^{n-1} - n = 0 \end{cases}$$

Lemme : Inégalité de Bernoulli

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \geq 0 \quad (1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \quad \forall \alpha > 0 \quad (1+\alpha)^n > 1+n\alpha$

Appliquons ce résultat avec $n \neq 1$, $\alpha = 1$: $\Rightarrow 2^n > 1+n$

On a $2^{n-1} > n = 1 + (n-1)$ pour $n-1 > 1 \Leftrightarrow n > 2$

Ainsi, (II) ne possède pas de sol. pour $n > 2$. Or $n \neq 1$. Donc le seul cas à

envisager est celui où $n=2$. Alors

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2^2 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2^2$$

On avait $y=2$

Alors $\begin{cases} x^y = (2^2)^2 \\ y^x = (2)^{2^2} \end{cases}$ sa marche : $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

Ccl :

$$x^y = y^x \text{ dans } \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ \text{ou} \\ x=4 \quad y=2 \\ x=2 \quad y=4 \end{cases}$$

EX02

Posons $n = x^2 - 2z^2 = 5(2t^2 - y^2)$ (1)

Notons $F = \{n \in \mathbb{N} / \text{on ou -n vérifie (1)}\}$

Alors $F \subset \mathbb{N}$ et $0 \in F$. Supposons, par l'absurde, que $F \neq \{0\}$. Alors $F \setminus \{0\} \neq \emptyset$ et il existe $n_0 = \min(F \setminus \{0\})$.

$$n_0 = x^2 - 2z^2 = 5(2t^2 - y^2) \quad (1)$$

(1) $\Rightarrow x^2 = 2z^2$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

donc $x=z=0$

Donc (1) $\Rightarrow x=5u$ et $z=5v$.

$u, v \in \mathbb{Z}$

Mais alors (1) donne : $m = \underbrace{y^2 - 2t^2}_{\neq 0} = 5(2v^2 - u^2)$

et $m \in F \setminus \{0\}$.

Mais : $n_0 = 5(5u^2 - 25v^2) = 5m \Rightarrow |n_0| = 5|m| \Rightarrow |m| < \frac{|n_0|}{5}$, absurde.

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	-1	4	1
$2x^2$	0	2	-2	3	2

Donc $F = \{0\}$.

Ainsi :
$$\begin{cases} x^2 - 2z^2 = 0 \\ 2x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1)$$

$$\Updownarrow \begin{cases} x^2 = 2z^2 \\ 2x^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \boxed{\text{cf lemme : } \begin{cases} a \in \mathbb{N}^* \\ a = \text{carre parfait} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall p \in \mathcal{P} \\ v_p(a) \text{ pair} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{cases} x = z = 0 \\ x = y = 0 \end{cases}$$

CQFD

EX03

(1) $x^2 + y^3 = y^6$

EX03

(1') $x^2 = y^3(y^2 - 1) \Rightarrow y^2 | x^2 \Rightarrow y | x$

Donc $x = \lambda y$

(1') $\Leftrightarrow \lambda^2 y^2 = y^3(y^2 - 1)$

Si $y = 0$, on obtient $x = 0$.

Si $y \neq 0$, (1') $\Leftrightarrow \lambda^2 = y(y^2 - 1)$ (2)

En notant $v_p(y) = 2a_p + r_p$ $0 \leq r_p < 1$, on peut écrire

$$y = \prod_{i=1}^k p_i^{v_{p_i}(y)} = \underbrace{\prod_{i=1}^k p_i^{2a_{p_i}}}_{u^2} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^k p_i^{r_{p_i}}}_{\neq \text{carre, sauf si } r_{p_i} = 0 \forall i \text{ autre que } 1}$$

Ainsi

$$y = u^2 v$$

où $\forall p \in \mathcal{P} \quad v_p(v) = 0 \text{ ou } 1$.

Mais $u^2 | y \Rightarrow u^2 | \lambda^2 \Rightarrow u | \lambda$. Posons $\lambda = \mu u$

Alors (2) : $\lambda^2 = u^2 v (u^6 v^3 - 1)$

Alors (2) donne : $\mu^2 u^2 = u^2 v (u^6 v^3 - 1) \Leftrightarrow \mu^2 = v (u^6 v^3 - 1)$

$\mu^2 = v(u^6 v^3 - 1)$ est un carré, donc $v_p(v(u^6 v^3 - 1))$ pair

Comme $v_p(v) + v_p(u^6 v^3 - 1) = v_p(v(u^6 v^3 - 1))$ pair et comme $v_p(v) = 0$ ou 1 ,

Il faut que $\begin{cases} v_p(u^6 v^3 - 1) \text{ pair si } v_p(v) = 0 \\ v_p(u^6 v^3 - 1) \text{ impair donc } \neq 0 \text{ si } v_p(v) = 1 \end{cases} \Rightarrow v \mid (u^6 v^3 - 1)$

$$\Downarrow \\ v \mid 1 \\ \Downarrow$$

Donc $y = u^2$.

$v = 1$ (on est ds $\mathbb{N}$)

et: $\mu^2 = u^6 - 1 \Leftrightarrow u^6 - \mu^2 = 1 \Leftrightarrow (u^3 - \mu)(u^3 + \mu) = 1$

$$\Leftrightarrow \Downarrow$$

$$\begin{cases} \mu = u^3 & u^3 - \mu = u^3 + \mu \\ \text{ou} \\ \mu = -u^3 & \Downarrow \\ & \mu = 0 \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} \lambda = u^4 \\ \text{ou} \\ \lambda = -u^4 \end{cases}$, c.à.d. $x =$

d'où $\lambda = 0$ et $x = 0$. Mais alors, (1) $\Leftrightarrow y^3 = y^6$

et $y^3 = y^6 \Leftrightarrow y^3(y^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ y = 1 \end{cases}$

Les seules sol. de (1) $x^2 + y^3 = y^6$ sont $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Où $\varphi(X)(x) = ax + b$ $a \neq 0$

On définit $\varphi: K[X] \rightarrow K[X]$ par: $\varphi(P)(x) = \sum_{i=0}^n \tilde{\varphi}(a_i) (ax+b)^i$
 $P \mapsto \varphi(P)$

Plus: $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q) \\ \varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q) \end{array} \right.$ (à vérifier)

φ est bijective: prendre $\varphi^{-1} / \varphi \left\{ \begin{array}{l} \varphi^{-1}(a) = a \text{ sur } K \\ \varphi^{-1}(X) = cx + d \text{ où } (cx+d) \circ (ax+b) = \text{Id} \end{array} \right.$
 $\Downarrow$
 $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id}.$

Conclusions: 1) Un homomorphisme d'un anneau de polynôme dans un autre anneau est déterminé uniquement grâce à $\varphi(P) = \sum_{i=0}^n \tilde{\varphi}(a_i) [\tilde{\varphi}(X)]^i$ où $\tilde{\varphi}: K \rightarrow K$ hom. et $\varphi(X)$ donné.

$\exists \varphi \in \text{Aut}(K[X]) \Leftrightarrow \varphi(P)_x = \sum_{i=0}^n \tilde{\varphi}(a_i) (ax+b)^i$

Exo

Déterminer tous les automorphismes de l'anneau de polynômes $K[X]$ où K est un corps.

Soit $\varphi \in \text{Aut}(K[X])$ $\varphi: K[X] \rightarrow K[X]$

$$\forall P, Q \in K[X] \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q) \\ \varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q) \end{array} \right.$$

On a : $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et surtout : $\forall a \in K$ $\varphi(a) \in K$. En effet :

Si $a = 0$ $\varphi(0) = 0 \in K$

Si non $a \neq 0 \Rightarrow aa' = 1 \Rightarrow \underbrace{\varphi(1)}_1 = \varphi(a)\varphi(a') \Rightarrow \varphi(a) \mid 1 \Rightarrow \deg \varphi(a) = 0$

$$\varphi: K[X] \longrightarrow K[X]$$



$$\tilde{\varphi} = \varphi|_K: K \longrightarrow K \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi} \in \text{Aut}(K)$$

Inversement, voyons si $\tilde{\varphi} \in \text{Aut}(K)$ peut se prolonger en une application

$\varphi \in \text{Aut}(K[X])$. Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$

$$\varphi(P) = \sum_{i=0}^n \tilde{\varphi}(a_i) [\varphi(X)]^i \quad (1)$$

Il suffit de connaître φ sur le polynôme X pour connaître entièrement φ .

Si $\varphi(X)(x) = \sum_{k=0}^K b_k x^k$ et $\varphi^{-1}(X)(x) = \sum_{l=0}^L c_l x^l$, alors faisons $\varphi = \varphi^{-1}(X)$

dans (1) :

$$X = \underbrace{\sum_{i=0}^L \tilde{\varphi}(c_l) [\varphi(X)]^i}_{\text{deg } KL} \Rightarrow KL = 1 \Rightarrow K = L = 1$$

Feuille N°8

- × 1° Déterminer les entiers n tels que $n^2 - 2n \equiv 3 \pmod{5}$ et $n^2 - 2n \equiv 11 \pmod{17}$.
- (I.24) × 2° Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels 0 est le centre du cercle inscrit aux trois points d'affixes z, z^2, z^3 .
- × 3° On se donne deux nombres x_0, y_0 , et on définit deux suites x_n, y_n par les relations de récurrence, pour $n \geq 0$:
- (I.24) $x_{n+1} = x_n + 2y_n, y_{n+1} = x_n$. Étudier la suite $r_n = \frac{x_n}{y_n}$ des quotients successifs.
- 4° Pour quelles valeurs de a l'équation $1 + \cos(ax) = \cos(2\pi x)$ admet-elle une infinité de solutions?
- 5° Soit E le plan affine réel. On se donne trois points A, B, C , non alignés de E . Montrer qu'il y a une structure euclidienne sur E pour qui le triangle ABC est équilatéral.
- 6° Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x+y+z) = f(x) + f(y) + f(z)$ pour $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- 7° Déterminer les fonctions f croissantes sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $f(x+1) - f(x) = e^{-x}$.

8° Trouver l'aire maximum d'un triangle inscrit dans une ellipse donnée.

9° Soit F un point fixe d'un plan euclidien affine et D une droite de ce plan. Quel est l'ensemble des foyers des paraboles de directrice D et passant par F ? Soit M un point quelconque du plan. Déterminez suivant la position de M les paraboles de l'ensemble précédent passant par M .

10° Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Montrez que la dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}(x)$ se met sous la forme $e^{-x^2} P_n(x)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré n .

Montrez que $P_{n+1} = 2x P_n - 2P'_n$; Montrez que P_n admet n racines réelles distinctes et qu'entre deux racines de P_n se trouve une racine de P_{n-1} .

I.25 11° Étudiez la suite de terme général $x \mapsto \int_0^x \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} dt$.

I.26 12° Étudiez l'ensemble des solutions de $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.
Montrez que la limite, quand $n \rightarrow \infty$, de la suite des racines est $-\infty$.

⊗ Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ / $O = \text{centre du cercle inscrit aux pts } z, z^2, z^3$.

Sol: $O = \text{centre du cercle inscrit}$ $\Leftrightarrow O = \text{bary. de } A(1z^3 - z^2) \text{ et } B(1z^3 - z) \text{ et } C(1z^2 - z)$

On devra avoir :

$$|z^3 - z^2| \vec{OA} + |z^3 - z| \vec{OB} + |z^2 - z| \vec{OC} = \vec{0}$$

en termes d'affixes :

$$|z^3 - z^2| z + |z^3 - z| z^2 + |z^2 - z| z^3 = 0$$

$$3|z||z-1|(1z + z|z+1| + z^2) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} z=0 \text{ ou } |z-1|=0 \\ \text{ou } |z|+z|z+1|+z^2=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ou} \\ \text{cercle } (O, \text{rayon } 1) \end{array} \end{aligned}$$

Si $z \neq 0$ et $|z-1| \neq 0$: $|z| + z|z+1| + z^2 = 0$

$$z = re^{i\theta} \quad r + re^{i\theta} |re^{i\theta} + 1| + r^2 e^{i2\theta} = 0$$

$$1 + e^{i\theta} |r \cos \theta + 1 + ri \sin \theta| + r^2 e^{i2\theta} = 0$$

$$1 + e^{i\theta} ((r \cos \theta + 1)^2 + r^2 \sin^2 \theta) + r^2 e^{i2\theta} = 0$$

$$1 + (r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^{\frac{1}{2}} (\cos \theta + i \sin \theta) + r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1 + (r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \cos \theta + r^2 \cos 2\theta = 0 \\ (r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \sin \theta + r^2 \sin 2\theta = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1 + r \cos 2\theta = - (r^2 + 2r \cos \theta + 1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \\ r \sin 2\theta = - (r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \end{cases}$$

que nous ne savons pas résoudre.

$$\otimes \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{array} \right.$$

Étudier $r_n = \frac{x_n}{y_n}$.

1^{re} méthode.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{PM} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Pb Calculer M^n .

$$\chi_M(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 2 \\ 1 & -X \end{pmatrix} = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$$

d'où $M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

d'où $M^n = \frac{1}{3} P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & -2(-1)^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & -2(-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & -2(-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

On calcule facilement $r_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{((-1)^n + 2^{n+1})x_0 + [2(-1)^{n+1} + 2^{n+1}]y_0}{((-1)^{n+1} + 2^n)x_0 + (2(-1)^n + 2^n)y_0}$

* Si n pair: $r_{n+1} = \frac{(+1 + 2^{n+1})x_0 + (2^{n+1} - 2)y_0}{(-1 + 2^n)x_0 + (2 + 2^n)y_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2x_0 + 2y_0}{x_0 + y_0} = 2$

* Si n impair $r_{n+1} = -1 + 2^{n+1} \dots$

Ce n'est pas la peine de faire ces distinctions car:

$$r_{n+1} = \frac{\left(\frac{(-1)^n}{2^n} + 2\right)x_0 + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + 2\right)y_0}{\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + 1\right)x_0 + \left(\frac{(-1)^n}{2^n} + 1\right)y_0} \rightarrow 2$$

$$\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + 1\right)x_0 + \left(\frac{(-1)^n}{2^n} + 1\right)y_0$$

2^e méthode

$$x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} \quad \text{et } (x_0, x_1).$$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{F}$
 $(x_0, x_1) \mapsto (x_n)_n$ } est un isomorphisme d'e.v. On cherche une base de $\mathcal{F}$. On se place plutôt dans $\mathbb{C}$.

On cherche des solutions du type $r^n = x_n$. Vous vous souvenez!

⊗

$$x \mapsto b_n = \int_0^x \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

Supposons que b_n soit définie sur $]-1, \infty[$
car def b_n contient 0 et b_n n'est pas
définie en -1 où $\int_0^x \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} dt$ diverge.

$$b_0(x) = \ln(1+x)$$

$$b_n(x) = \int_0^x \frac{t}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{2} [b_{n+1} + 1 + t]_0^x$$

Posons $u = t$

$$b_n(x) = \int_0^x \frac{t}{(1+t)^2} dt = -\frac{x}{1+x} + b_0(x)$$

$$b_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} dt \quad \text{Posons } u = t^n \quad du = n t^{n-1} dt$$

$$v' = \frac{1}{(1+t)^{n+1}} \Rightarrow v = \frac{(1+t)^{-n}}{-n}$$

$$\text{d'où} \quad b_n(x) = \left[t^n \frac{(1+t)^{-n}}{-n} \right]_0^x - \int_0^x t^{n-1} \frac{(1+t)^{-n}}{-n} dt$$

$$\boxed{b_n(x) = -\frac{1}{n} \frac{x^n}{(1+x)^n} + b_{n-1}(x)}$$

$$\text{d'où} \quad b_n(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} \quad \parallel (I)$$

$$\text{On a } \ln(1-u) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k} \text{ si } |u| < 1.$$

$$\left| \frac{x}{1+x} \right| < 1 \text{ dès que } x > -\frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x > -\frac{1}{2} \quad \left| \frac{x}{1+x} \right| < 1, \text{ et donc:}$$

$$\ln\left(1 - \frac{x}{1+x}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n -\frac{x^k}{k(1+x)^k}$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{1+x}\right) + \ln(1+x) = 0$$

Ainsi :

$$x > -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

Si $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $\left| \frac{1}{k} \frac{x^k}{(1+n)^k} \right| \rightarrow +\infty$

$x = -\frac{1}{2} + u$ $\frac{1}{k} \frac{(u - \frac{1}{2})^k}{(\frac{1}{2} + u)^k} = \frac{2^k}{k} \left(u - \frac{1}{2}\right)^k (1 - 2u)^k + o(u)$

pour $(u \rightarrow 0)$

Donc

$$-1 < x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{x}{1+n} \right| > 1 \Rightarrow \frac{\left| \frac{x}{1+n} \right|^k}{k} \rightarrow +\infty$$

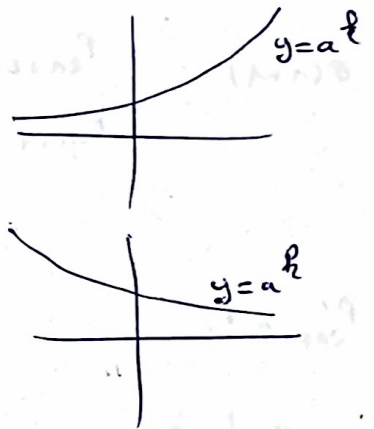
Car $n > 1 \Rightarrow \frac{n^k}{k} \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow +\infty)$

Rappel : a base du $\log_a$, $a > 0$ et $a \neq 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ 0 < a < 1 \end{array} \right. \quad \frac{a^k}{k} \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow +\infty)$$

 $a > 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ 0 < a < 1 \end{array} \right. \quad \frac{a^k}{k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty)$$

 $0 < a < 1$ 

Preuve :

⊗ $n \in \mathbb{N}$ TDB

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + x \quad 1 \text{ racine}$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \Delta < 0 \Rightarrow \text{pas de racines dans } \mathbb{R}$$

Remarquons que $P_n'(x) = P_{n-1}(x)$

Hypothèse de récurrence : $P(n) \begin{cases} P_{2n} \text{ n'a pas de racine réelle} \\ P_{2n-1} \text{ possède une et une seule racine réelle.} \end{cases}$

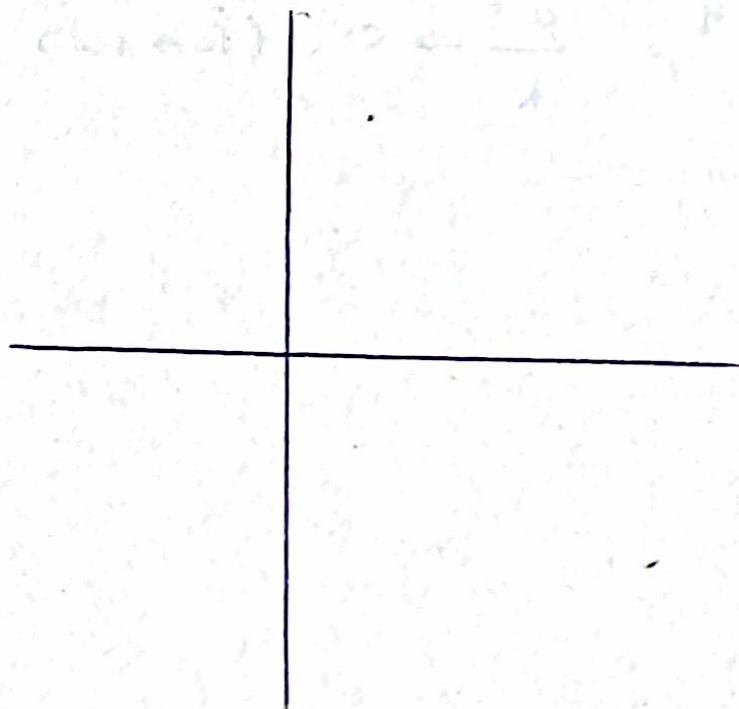
• $P(0)$ est vraie

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n+1) : \begin{cases} P_{2n+2} \text{ n'a pas de racine} \\ P_{2n+1} \text{ 1 racine.} \end{cases}$

$$P'_{2n+1} = P_{2n}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P'_{2n+1} = P_{2n}$		+
P_{2n+1}	$-\infty$	$+\infty$



Donc $\exists$! racine à P_{2n+1} (P_{2n+1} est une fonction strictement croissante, et continue, de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donc P_{2n+1} est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$)

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P'_{2n+2} = P_{2n+1}$	-	0	+
P_{2n+2}	$\searrow$	0	$\nearrow$

? $P_{2n+2} \geq 0$ car

$$P_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + P_{2n+1}(x)$$

~~$P_{2n+2}(x) = 0 \Rightarrow P_{2n+1}(x) = 0$ absurde.~~

$$p_{2n+2}(x_0) = \frac{x_0^{2n+2}}{(2n+2)!} + 0 \geq 0 \text{ et même } > 0 \text{ sinon } x_0 = 0$$

et alors $\underbrace{p_{2n+2}}_0(0) = \frac{0^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} + p_{2n}(0)$

$$\Downarrow$$

$$p_{2n}(0) = 0, \text{ absurde.}$$

Limite de la suite des racines quand $(n \rightarrow +\infty)$

Posons $x_n = \text{racine de } p_{2n+1}(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \quad / \quad \forall n, \quad \Rightarrow \quad |e^{x_n} - p_{2n+1}(x)| < \varepsilon$$

$n > N$

(convergence normale, et
 $\hat{m}$ uniforme de
 $\sum \frac{x^k}{k!} \rightarrow e^x$)

$$p_{2n+1}(x_n) = 0$$

$\hookrightarrow$

d'où :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad / \quad |e^{x_n}| < \varepsilon$$

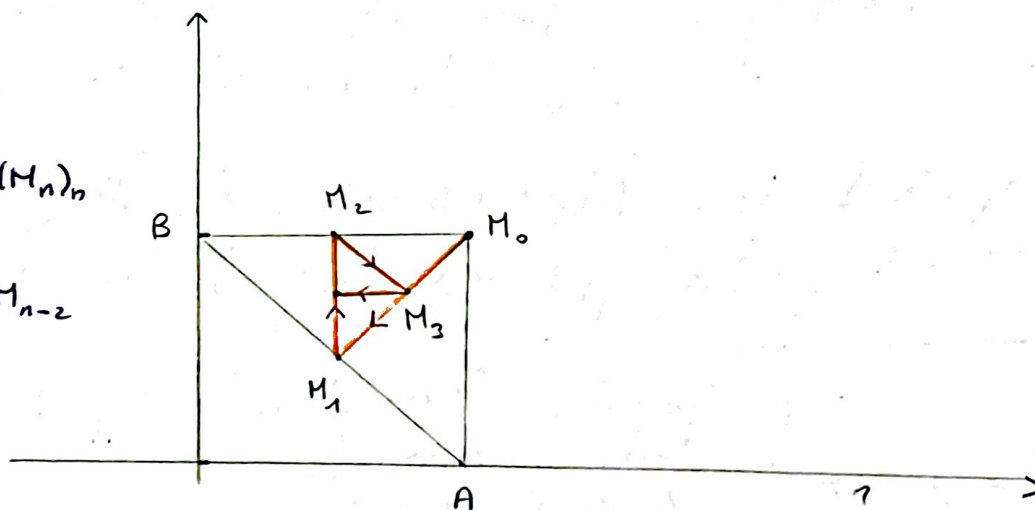
$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x_n} = 0 \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

⊗ TD 9 n°1

Étudier la suite $(M_n)_n$

M_n projeté sur $M_{n-1} M_{n-2}$

$\parallel$
 M_{n+1}



M_{n+1} est le sommet d'un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse $M_{n-1} M_n$

Pb : il y a 2 tels triangles isocèles.

$$\vec{M_0 M_2} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_u e^{-i\frac{\pi}{4}} \vec{M_0 M_1}$$

(similitude de centre M_0 , d'angle $-\frac{\pi}{4}$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Hyp. de récurrence : $\vec{M_{n-2} M_n} = u \vec{M_{n-2} M_{n-1}} \quad \forall n$

UNIVERSITÉ DE NICE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
ET SCIENCES PHYSIQUES

PARC VALROSE
06034 NICE CEDEX
TÉL. (93) 84.60.29

MATHÉMATIQUES

1.03.79

Préparation au Capes

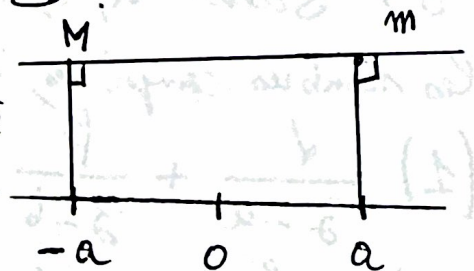
Oral

Feuille N° 9

(1) Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne les points A, B, M_0 de coordonnées respectives $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$. On obtient un point M_1 par projection de M_0 sur AB , un point M_2 par projection de M_1 sur M_0B , un point M_3 par projection de M_2 sur M_1M_0 , un point M_n par projection de M_{n-1} sur $M_{n-2}M_{n-3}$. Étudier la suite $(M_n)_n$.

(I.29) 2) Soit D la droite $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$. Écrire, comme application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la symétrie par rapport à D . (I.29)

(I.30) 3) Écrire l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie
 $z \mapsto \bar{z}$ à-centre
 $m \mapsto M$ (à fixe)



4) Soit $t \in \mathbb{R}$, étudier géométriquement la transformation $z \mapsto (1+it)z + t$. Quel est le transformé C' du cercle de centre 0 de rayon $\sqrt{2}$? Ensemble E des points d'intersection de $x=t$ avec C' quand t varie. Montrer que, pour tout t , C' est tangent à E .

5) Si $z \in \mathbb{C}$ est fixe, considérons l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (2)
 $u \mapsto w = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$

Ensemble des u tels que w soit réel.

Si $|u|=1$, retrouver le résultat géométriquement.

6) On considère l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z' = \left(\frac{az+b}{z+c} \right)^2$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $ac-b \neq 0$. Lieu des points pour lesquels $z' \in \mathbb{R}$. Interprétation géométrique.

7) Soit l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z' = (2 - 3i)z + i\bar{z} + 1$
(m) (m')

Étudier cette application. Condition pour que O, m, m' soient alignés.

(20/20) 8) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On considère les nombres complexes, $\neq a, b, c$ solutions de l'équation

$$(1) \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + \frac{\gamma}{z-c} = 0. \text{ En appelant } A, B, C,$$

M' et M'' les points du plan affine d'affixes $\alpha, \beta, c, z', z''$,
montrer que l'ensemble des bissectrices des droites AB et BC est
l'ensemble des bissectrices de AM' et AM'' . solutions de (1)

[il est souhaitable d'introduire les arguments des nombres complexes. à vos souhaits!]

Faire la simplification $\begin{cases} \alpha = 0 \\ c = \lambda \bar{b} \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$

Poser $z = z - a$, puis trouver $u \in \mathbb{U} / uc = \lambda \bar{u} \bar{b}$
On développe ensuite (1)

⊗ f définie sur $]0, \infty[$ par $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(x) = \frac{1}{p+q}$ si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $\gcd(p, q) = 1$.

Montrer que f admet une limite en tout point $x_0 > 0$. Continuité en x_0 ?

$\varepsilon > 0$ fixé.

Notons $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}_+ / f(x) > \varepsilon\}$. Alors $x \in A_\varepsilon \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ et

$$x = \frac{p}{q} \text{ où } \frac{1}{p+q} > \varepsilon \Leftrightarrow 2 \leq p+q < \frac{1}{\varepsilon}$$

Il y a un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $2 \leq p+q < \frac{1}{\varepsilon}$. Donc

A_ε fini.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\} \quad x \notin A_\varepsilon.$$

Alors $0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Donc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+$.

Continuité

f sera continue en x_0 si $f(x_0) = 0$ c.à.d si $x_0 \notin \mathbb{Q}$.

⊗ Trouver les fonctions continues sur $]-\infty, +\infty[$ qui admettent pour périodes 1 et $\sqrt{2}$.

a) les fcts ctes conviennent.

b) Soit f répondant à la question. Elle admet pour période

$$a + b\sqrt{2} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Alors $(\sqrt{2} - 1)^n$ est période de f .

Soit f non constante, solution. $\exists x_0 \in \mathbb{R} / f(x_0) \neq f(0)$

$$\text{Prenons } \varepsilon = \frac{|f(x_0) - f(0)|}{2}$$

$\forall \eta > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\sqrt{2}-1)^n < \eta$

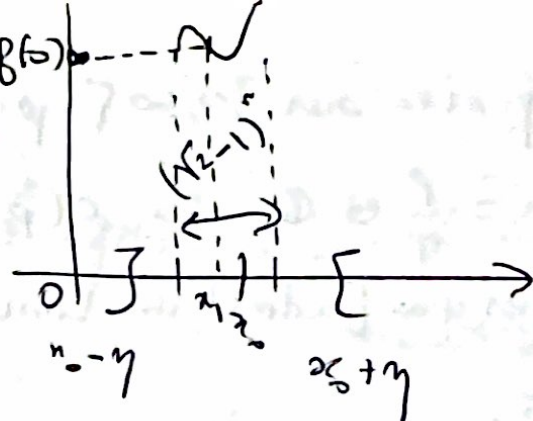
Sur cette période, il existe x_1 tel que $f(x_1) = f(x_0)$.

Mais alors $|f(x_1) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

d'où $\exists x_1 \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\mid |f(x_1) - f(x_0)| > \varepsilon$

Ce qui montre que f n'est pas continue en x_0 , absurde.

Les seules fcts f solutions sont les constantes.



D : $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$

Soit, comme application de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, la symétrie par rapport à D

$$z' = e^{i\theta} \bar{z} + b$$

Similitude indirecte

$$z' = a \bar{z} + b \quad a = \rho e^{i\theta}$$

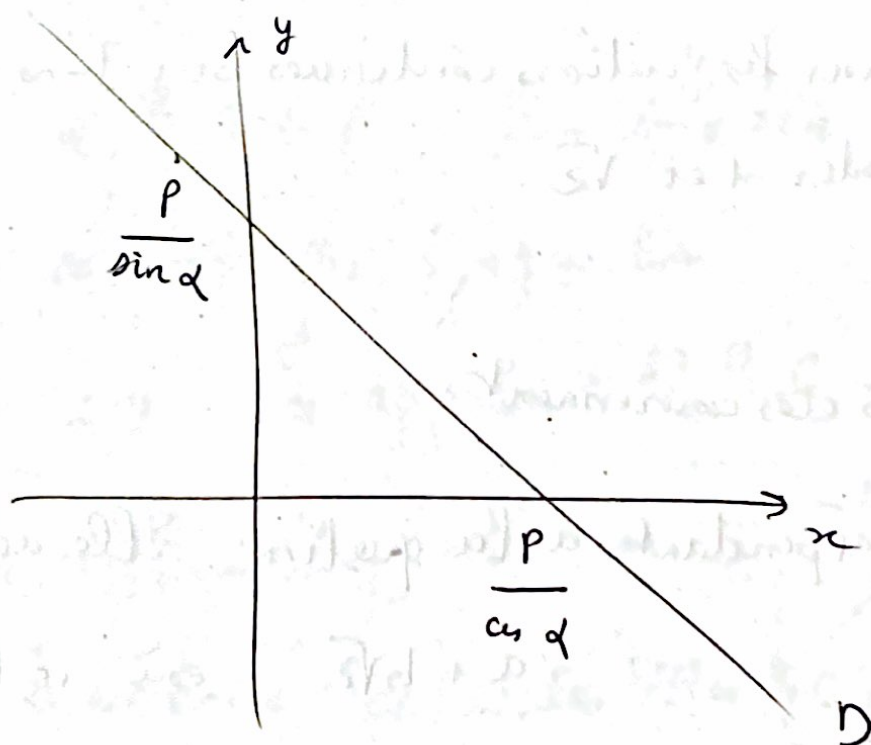
Si c'est une symétrie orthogonale, le rapport de l'homothétie est 1 : donc $\rho = 1$.

* Supposons que $\begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq k \frac{\pi}{2}$

On a :

$$\begin{cases} \frac{p}{\cos \alpha} = e^{i\theta} \frac{p}{\cos \alpha} + b \\ \frac{p}{\sin \alpha} i = e^{i\theta} \left(-\frac{p}{\sin \alpha} i \right) + b \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} p = e^{i\theta} p + b \cos \alpha \\ pi = e^{i\theta} (-pi) + b \sin \alpha \end{cases}$$



$$\begin{cases} p = e^{i\theta} p + b \cos \alpha \\ -p = p e^{i\theta} + b i \sin \alpha \end{cases}$$

$$2p = b(\cos \alpha - i \sin \alpha) \Rightarrow b = \frac{2p}{e^{-i\alpha}} = 2p e^{i\alpha}$$

$$\text{d'où } e^{i\theta} p = p - 2p e^{i\alpha} \cos \alpha$$

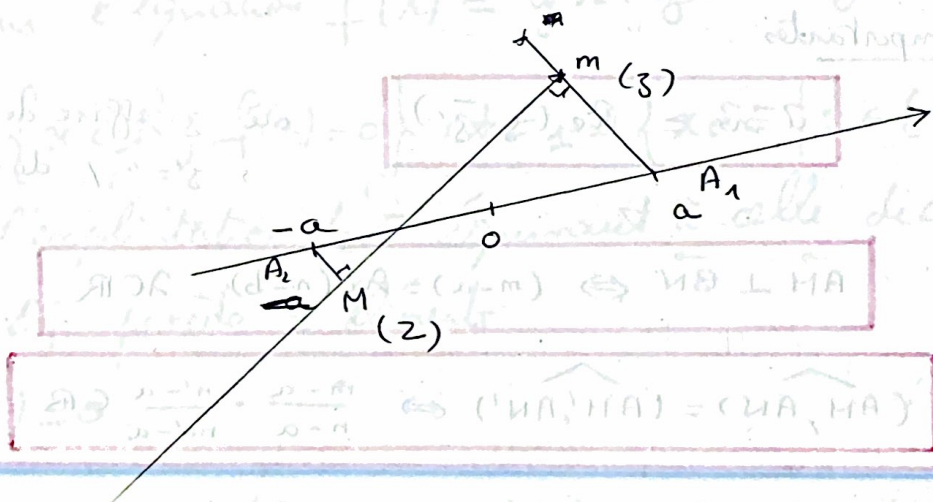
$$e^{i\theta} = 1 - 2 e^{i\alpha} \cos \alpha = 1 - 2(\cos^2 \alpha + i \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$= (1 - 2 \cos^2 \alpha) - 2 \sin \alpha \cos \alpha i$$

$$e^{i\theta} = -\cos 2\alpha - \sin 2\alpha i$$

$$e^{i\theta} = -e^{i2\alpha}$$

$$\text{d'où } \boxed{z' = -e^{i2\alpha} z + 2p e^{i\alpha}}$$



$$z + a = \lambda(z - a) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Cherchons l'équation de la droite mM . C'est l'ensemble des points m' tels que

$$\vec{mm'} \perp \vec{A_1m}$$

Rappel: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(z \bar{z'})$

$$\vec{mm'} \cdot \vec{A_1m} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}((z' - z)(\bar{z} - a)) = 0$$

$$\text{Donc } \Leftrightarrow \operatorname{Re}[(\lambda(z - a) - a - z)(\bar{z} - a)] = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \operatorname{Re} [\lambda |z-a|^2 - \frac{1}{2} (z+a)(\bar{z}-a)] = 0$$

$$\lambda |z-a|^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Re} [(z+a)(\bar{z}-a)] = 0$$

$$\lambda (z-a)^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [(z+a)(\bar{z}-a)]$$

$$\text{Si } z \neq a \quad \lambda = \frac{\operatorname{Re} [(z+a)(\bar{z}-a)]}{(z-a)^2}$$

~~Si $z \neq a$, on écrit de toute façon~~

$$\text{d'où } f(z) = -a + \frac{\operatorname{Re} [(z+a)(\bar{z}-a)]}{z-a}$$

NB : 2^e méthode

$$\begin{cases} z-a = \lambda i (z-z) \\ z+a = \mu i (z-z) \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Remarques Importantes

Dans $\mathbb{C}$

$$z \cdot \bar{z} = \operatorname{Re}(z \cdot \bar{z})$$

où $z = \text{affixe de } \vec{u}$
 $\bar{z} = \text{affixe de } \vec{v}$

$$\vec{AM} \perp \vec{BN} \Leftrightarrow (m-a) = \lambda i (n-b) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(parler de rotation
d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$)

angles de
droites :

$$(\widehat{AM, AN}) = (\widehat{AM', AN'}) \Leftrightarrow \frac{m-a}{n-a} \cdot \frac{n'-a}{m'-a} \in \mathbb{R}$$

IMSP

19.3.79

Préparation au Capes

mathématiques

Oral

Feuille N° 10

1) Résolvez l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\cos x \cos 2x \cos 4x \geq \frac{1}{8}$$

(on réduira le domaine d'étude et on utilisera l'expression développée de $\sin 2x$)

2° Considérons l'équation $f(x) = \tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x = 0$.

$$\text{Soit } E = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} \text{ et } E_1 = \{x \in E \mid x \in [0, \pi/2]\}$$

Montrez que l'explicitation de E équivaut à celle de E_1 .

⊕ Montrez que E_1 possède 5 éléments.

Résolvez $f(x) = 0$.

3° Soit le plan affine rapporté à un repère orthonormé.

On considère une hyperbole équilatère H et un point $P \in H$. Soit P' le symétrique de P par rapport à O le centre de symétrie de H .

Le cercle de centre P de rayon PP' recoupe l'hyperbole en trois points différents de P' , A, B, C . Montrez que le triangle ABC est équilatéral. On résoudra l'exercice en utilisant les affixes complexes des points correspondants.

4^e Ensemble des points M d'affixe z tels que

(I.37)

$$Z = (z-a)^3 (z-b)^3 \text{ soit réel?}$$

5^e Discuter suivant les valeurs de φ le nombre des solutions de l'équation suivante dans $\mathbb{C}$: $(1+e^{i\varphi})z + (e^{2i\varphi}-1)\bar{z} + (1-i)=0$

6^e Soit $z \in \mathbb{C}$ et soient M_1, M_2, M_3 respectivement les points d'affixes z, z^2, z^3 . Trouver une condition pour que M_1, M_2, M_3 soient un triangle rectangle.

7^e Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{z^2+az+b}{z^2+a'z+b'}$ où $a \neq a', b \neq b'$. Soit φ une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Résolvez $f(\varphi(z)) = f(z)$ et déterminez une relation liant z et $\varphi(z)$ dans ce cas.

8^e On considère $p \in \mathbb{C}$ et $q \in \mathbb{C}^*$; soit $z^2+pz+q=0$ l'équation complexe dont z_1 et z_2 sont racines.

Trouvez une condition portant sur p et q pour que z_1 et z_2 aient même argument.

9^e Soit $P = \{x+iy \mid y > 0\}$. Soit R la relation définie dans

(I.34) P par $z R z' \Leftrightarrow z' = \frac{z \cos \theta + \sin \theta}{-z \sin \theta + \cos \theta}$ montrez que R est une relation d'équivalence dont vous déterminerez les classes.

(4) $a, b \in \mathbb{C}, z = (z-a)^3(z-b)^3$ réel ou
 $\arg z \equiv 0 \pmod{\pi}$ ou $z=0$.

Donc $z=a$ ou b

ou bien :

$$3 \arg(z-a) + 3 \arg(z-b) = 0 \pmod{\pi}$$

$$3 [\arg(z-a) + \arg(z-b)] = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z-a) + \arg(z-b) = \frac{k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(5) $\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad (1+e^{i\varphi})z + (e^{2i\varphi}-1)\bar{z} + (1-i) = 0 \quad (I)$

$$z = x+iy$$

$$\underbrace{(1+e^{i\varphi})(x+iy)}_A + \underbrace{(e^{2i\varphi}-1)(x-iy)}_B + 1-i = 0$$

$$A = (1+\cos\varphi + i\sin\varphi)(x+iy)$$

$$A = (1+\cos\varphi)x - y\sin\varphi + i(x\sin\varphi + y(1+\cos\varphi))$$

$$B = (\cos 2\varphi - 1 + i\sin 2\varphi)(x-iy)$$

$$B = (2\cos^2\varphi - 2 + i2\sin\varphi\cos\varphi)(x-iy)$$

$$B = 2x\cos^2\varphi - 2y\sin\varphi\cos\varphi + i(2x\sin\varphi\cos\varphi - 2y\cos^2\varphi)$$

(I) équivaut à :

$$\begin{cases} (1+\cos\varphi)x - y\sin\varphi + 2x\cos^2\varphi - 2y\sin\varphi\cos\varphi + 1 = 0 \\ x\sin\varphi + y(1+\cos\varphi) + 2x\sin\varphi\cos\varphi - 2y\cos^2\varphi - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+\cos\varphi + 2\cos^2\varphi)x + (2\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)y = -1 \\ (\sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi)x + (1+\cos\varphi - 2\cos^2\varphi)y = 1 \end{cases}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1+\cos\varphi + 2\cos^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi \\ \sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi & 1+\cos\varphi - 2\cos^2\varphi \end{vmatrix}$$

$$= 1 + \cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 4\cos^4\varphi - [4\cos^2\varphi - 1]\sin^2\varphi$$

$$(4\cos^2\varphi - 1)(1 - \cos^2\varphi)$$

$$4\cos^2\varphi - 1 + \cos^2\varphi - 4\cos^4\varphi$$

$$= 3 - 4\cos^2\varphi + 2\cos\varphi = 3(1 + \cos\varphi - 2\cos^2\varphi)$$

Pb: résoudre en φ :

$$1 + \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi = 0$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \cos^2 \varphi \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\varphi}{2} = \cos \varphi \quad (a) \\ \cos \frac{\varphi}{2} = -\cos \varphi = \cos(\pi - \varphi) \quad (b) \end{array} \right.$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{\varphi}{2} \equiv \varphi [2\pi] \text{ ou } \frac{\varphi}{2} \equiv -\varphi [2\pi]$$

$$\varphi = \frac{\varphi}{2} + k2\pi \text{ ou } \frac{\varphi}{2} = -\varphi + k'2\pi \quad \left. \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z} \\ k' \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$$\frac{3\varphi}{2} = k2\pi \text{ ou } \frac{3\varphi}{2} = k'2\pi$$

$$\varphi = k \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \varphi = k' \frac{4\pi}{3} \quad (a')$$

$$(b) \Leftrightarrow \frac{\varphi}{2} \equiv \pi - \varphi [2\pi] \text{ ou } \frac{\varphi}{2} \equiv -\pi + \varphi [2\pi]$$

$$\frac{3\varphi}{2} = \pi + k2\pi \text{ ou } \frac{\varphi}{2} = \pi + k2\pi$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} + k \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \varphi = 2\pi + k4\pi$$

Sol:

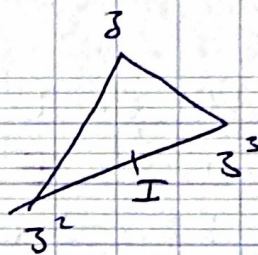
$$\text{sol} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = k4\pi \\ \varphi_2 = k \frac{4\pi}{3} \\ \varphi_3 = 2\pi + k4\pi \\ \varphi_4 = \frac{2\pi}{3} + k \frac{4\pi}{3} \end{array} \right. \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

D'où la discussion:

Si φ est de la forme indiquée ci-dessus, il existe une unique

rectangle en M_1

$$I \left(\frac{z^3 + z^2}{2} \right)$$



$$\left| z - \frac{z^3 + z^2}{2} \right| = \left| z^2 - \frac{z^3 + z^2}{2} \right|$$

$$\left| \frac{z^3 + z^2 - 2z}{2} \right| = \frac{1}{2} |z^2 - z^3| \quad z \neq 0$$

$$|z^2 + z - 2| = |z|^2 |1 - z|$$

$$\cancel{|z-1|} |z+2| = \cancel{|z-1|} |z|^2 \quad z \neq 1$$

Anésoûdie $|z+2| = |z|^2$

$$|z+2|^2 = |z|^4$$

$$(x+2)^2 + y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

$$x^2 + 4 + 24x + y^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$$

$\Updownarrow$

$$x^4 - x^2 + 2x^2y^2 + y^4 - y^2 - 4x - 4 = 0$$

Sous forme trigo. ?

$$z = r e^{i\theta}$$

$$\sqrt{(r^2 \cos \theta + 2)^2 + r^2 \sin^2 \theta} = r^2$$

$\Updownarrow$

$$(r \cos \theta + 2)^2 + r^2 \sin^2 \theta = r^4$$

Changeons notre façon d'écrire

Toujours pour le cas rectangle en M_1 , on aura: ($z \neq 0$ et 1)

$$\text{rect. en } M_1 \Leftrightarrow z^3 - z = 2i(z^2 - z)$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(z+1) = 2i(z-1)$$

$$\Leftrightarrow z = 2i - 1$$

(notation

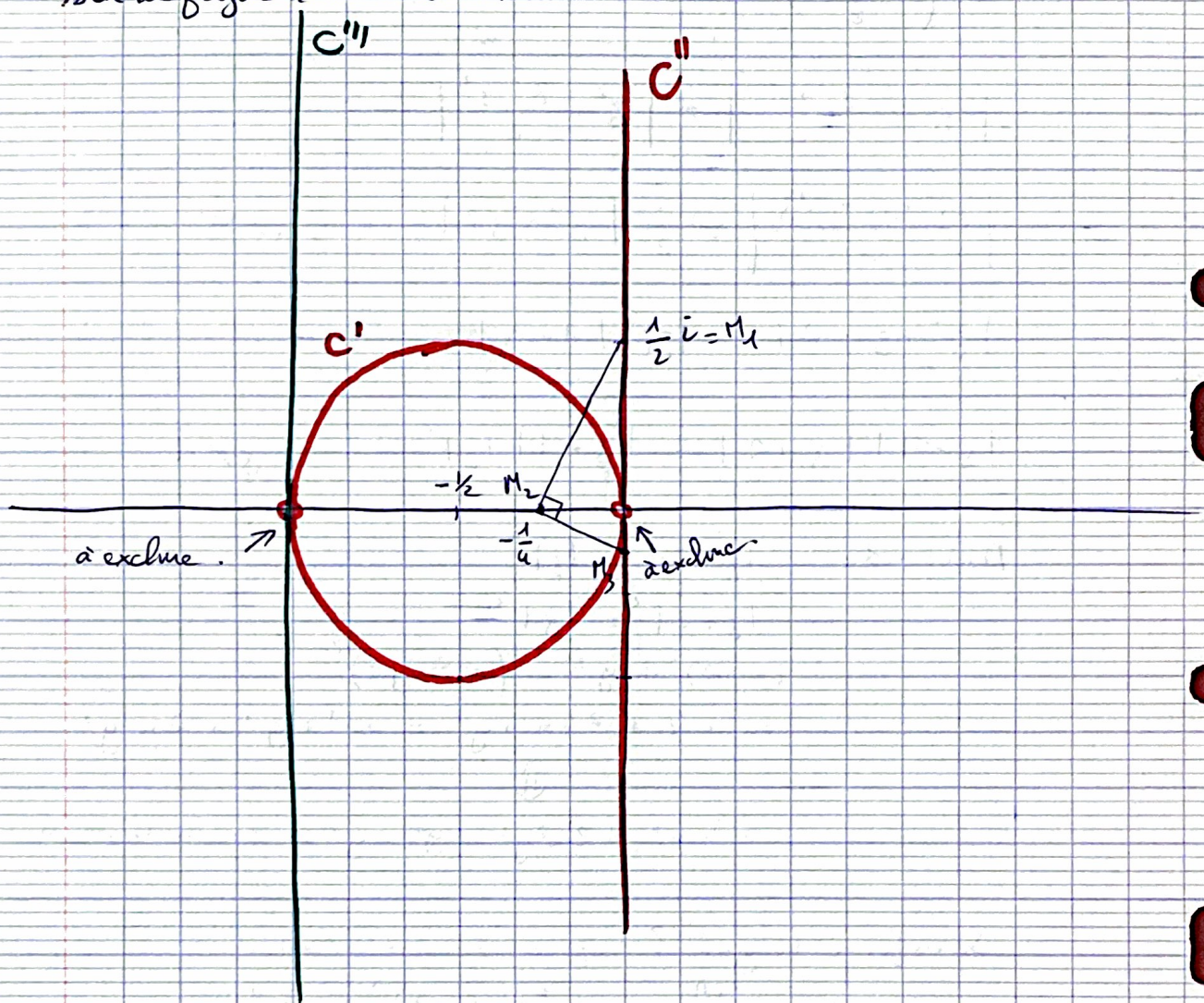
d'angle $\neq \delta_1$ ou δ_2)

$$\lambda \in \mathbb{R}^*$$

C.d.

$$C'' = \{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z = -1 \} \cup \{-1\}$$

l'ensemble ~~de~~ des complexes z tels que z, z^2, z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle est donc résumé sur la figure ci-dessous:



CQFD

(Pour que $M_1 \neq M_2 \neq M_3$, il faut
que $z \neq 0, 1$ et -1 .)

JAF

JAF

JAF

JAF

JAF

JAF

solution à l'équation (I).

Les autres cas sont à envisager séparément :

$$1) \varphi = k4\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Alors (I)} \Leftrightarrow 2z + (1-i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{i-1}{2} \quad \text{Absurde}$$

$$2) \varphi = k \frac{4\pi}{3}$$

$$(I) \Leftrightarrow$$

$$(I) \quad (1+e^{i\varphi})z + (e^{-2i\varphi}-1)\bar{z} + (1-i) = 0$$

$$2i \operatorname{Im} z + e^{i\varphi} z + e^{-i\varphi} \bar{z} + 1-i = 0$$

$$2i r \sin \alpha + e^{i(\varphi+\pi)} r + r e^{i(2\varphi-\pi)} + 1-i = 0$$

$$\text{où } z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$\begin{cases} r \cos(\varphi+\pi) + r \cos(2\varphi-\pi) + 1 = 0 \\ 2r \sin \alpha + r \sin(\varphi+\pi) + r \sin(2\varphi-\pi) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$r(\varphi+\pi) + 2r \sin \alpha + \cos(2\varphi-\pi) + \sin(\varphi+\pi) + \sin(2\varphi-\pi) = 0$$

Solution exacte.

$$\det = 0 \Leftrightarrow \cos 2\varphi = \frac{1}{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \varphi = \frac{2}{5} \\ \cos^2 \varphi = \frac{3}{5} \end{array} \right.$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{3}{5}$$

$$\varphi \neq \alpha, 2\varphi \neq \frac{1}{5}, \exists! \alpha$$

$$\varphi \neq \alpha, 2\varphi = \frac{1}{5}$$

la condition de compatibilité
n'est pas vérifiée.
donc ~~pas~~ solution.

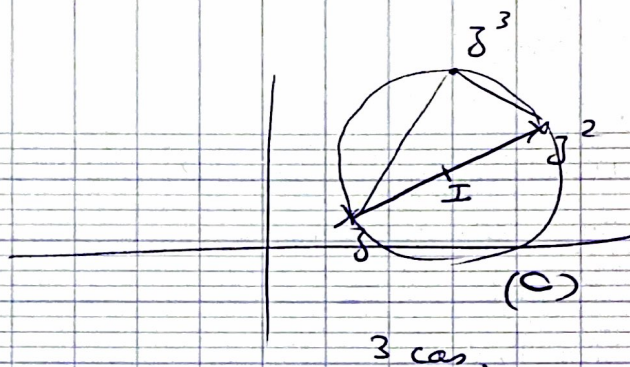
$$\frac{1-\cos \alpha}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

⑥

$$M_1(z)$$

$$M_2(z^2)$$

$$M_3(z^3)$$



rectangle en M_3

$$I \text{ d'affixe } \frac{z+z^2}{2}$$

$$(C) \text{ d'equation: } \left| z - \frac{z+z^2}{2} \right| = \left| \frac{z^2-z}{2} \right|$$

Il faut et il suffit que $z^3 M_3 \in (C)$, c.à.d que l'on ait:

$$\left| z^3 - \frac{z+z^2}{2} \right| = \left| \frac{z^2-z}{2} \right| \quad \text{Grosser}$$

$$|2z^3 - z^2 - z| = |z^2 - z| \quad (I)$$

1st

On veut un vrai triangle, c.à.d quelque $z \neq z^2 \neq z^3$.

Donc $z \neq 0$.

$$(I) \Leftrightarrow |2z^2 - z - 1| = |z - 1|$$

$$2z^2 - z - 1 = (z-1)(2z+1)$$

$$|z-1| |2z+1| = |z-1|$$

$$|z-1| (|2z+1| - 1) = 0$$

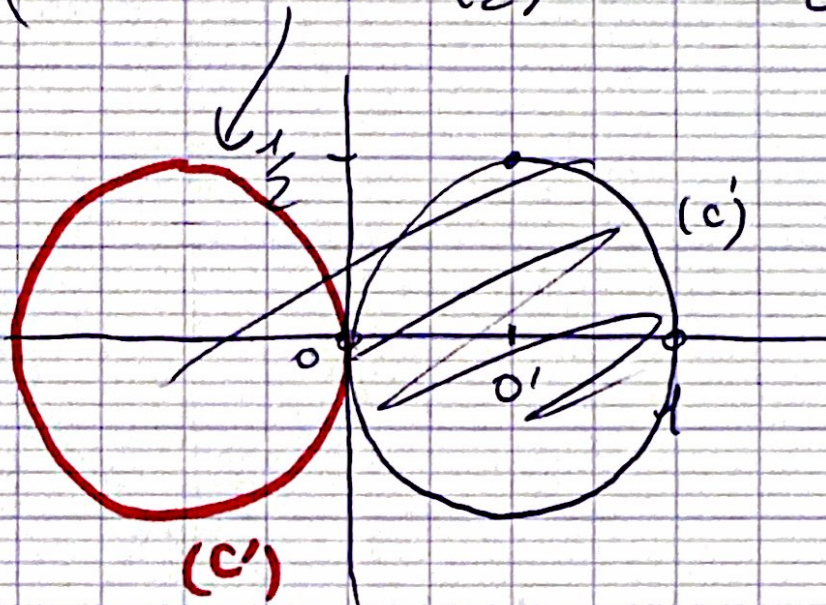
$\Downarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} |z-1| = 0 \\ \text{ou} \\ |2z+1| = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 1 \\ \text{ou} \\ |2z+1| = 1. \end{array} \right.$$

$$M_1 \neq M_2 \neq M_3 \Rightarrow z \neq 1.$$

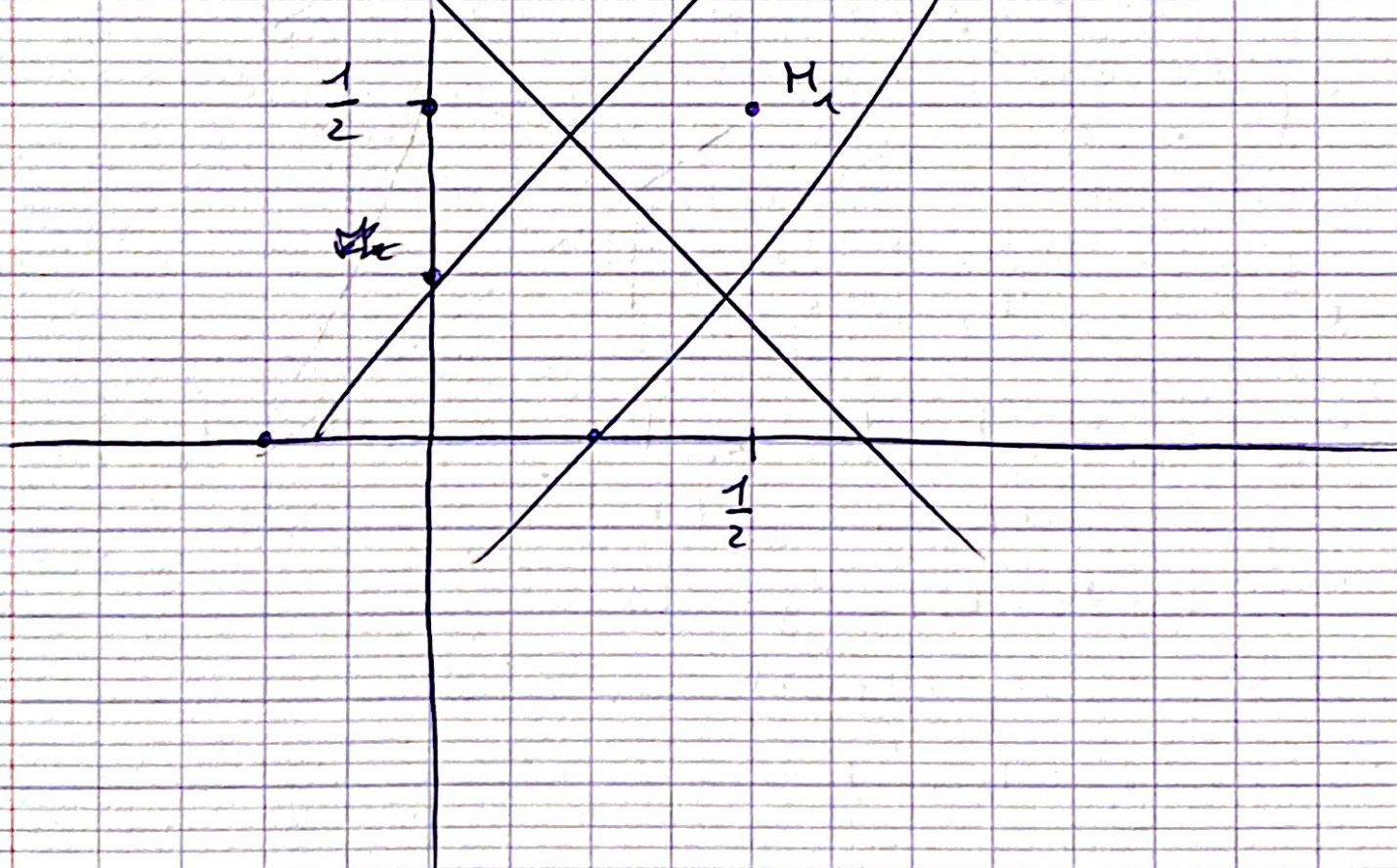
Donc, notre tri. est rectangle en M_3 ssi $|z + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$
 c.a.d ssi $z \in (\text{cercle de centre } O'(\frac{1}{2}) \text{ et de rayon } \frac{1}{2}) = C'$
 \{0\}.



Prends par exemple

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}(1+i) \\ z^2 = \frac{1}{4}(2i) = \frac{i}{2} \\ z^3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

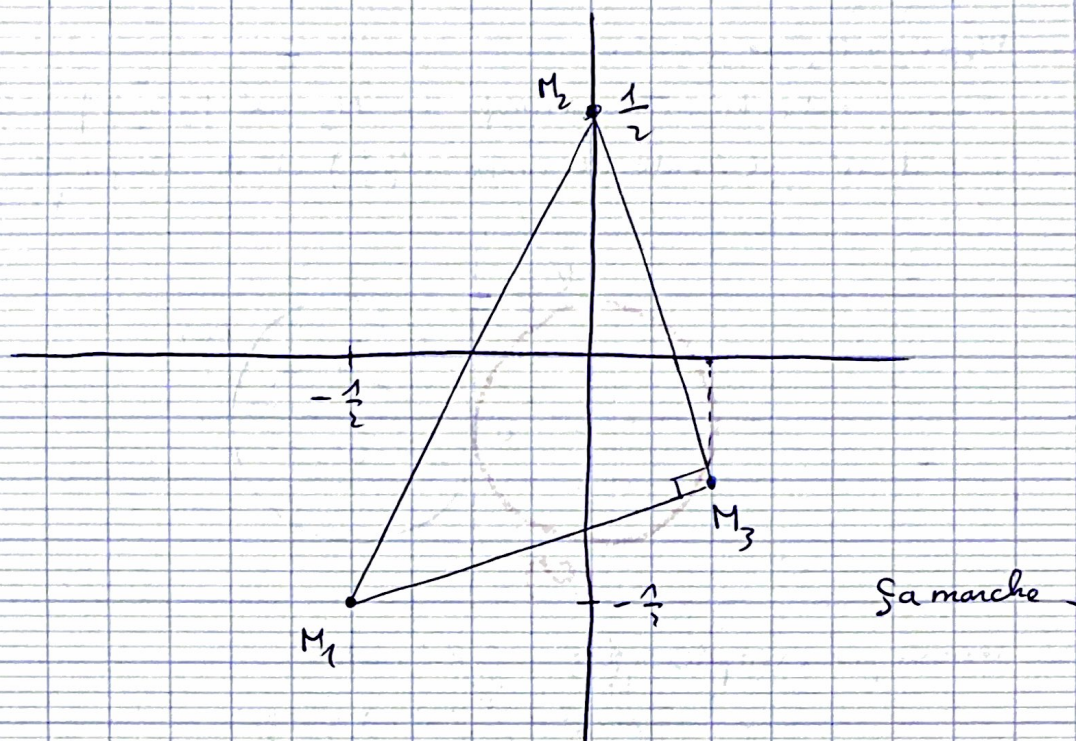
et, dans le plan d'Argand-Cauchy,



Prends

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2}(1+i) \\ z^2 &= \frac{i}{2} \\ z^3 &= -\frac{i}{4}(1+i) = \frac{1}{4}(1-i) \end{aligned}$$

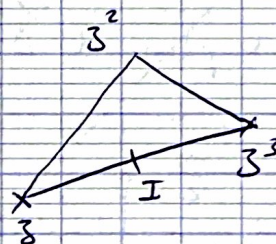
dans le plan Arg. Cauch. :



On fait de même pour les autres cas de figure.

rectangle en M_2

$$I\left(\frac{z+z^3}{2}\right)$$



$$\left| z^2 - \frac{z+z^3}{2} \right| = \left| \frac{z+z^3}{2} - z \right|$$

$$|2z^2 - z^3 - z| = |z^3 - z|$$

$$z \neq 0 \text{ et } 1$$

$$|2z - z^2 - 1| = |z^2 - 1|$$

$$|(z-1)(z+1)| = |z^2 - 1|$$

$$|z-1|^2 = |z-1||z+1|$$

$$|z-1| = |z+1|$$

$\Downarrow$

$$|z-1|^2 = |z+1|^2$$

$$(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2$$

$$x^2 + 1 - 2x = x^2 + 1 + 2x \Leftrightarrow x = 0.$$

solution $\Leftrightarrow z \in C''$ où $C'' =$ imaginaires purs.
($z \neq 0$)

8

 $p \in \mathbb{C}$ et $q \in \mathbb{C}^*$ (1) $z^2 + pz + q = 0$ de racines z_1, z_2 .On veut que $\arg z_1 \equiv \arg z_2 \pmod{2\pi}$

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2)$$

$$z_1 z_2 = q$$

$$\text{Posons } z_1 = r_1 e^{i\theta} \text{ et } z_2 = r_2 e^{i\theta}$$

$$\text{Alors } r_1 r_2 e^{i2\theta} = q$$

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = z^2 + pz + q$$

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -p \\ z_1 z_2 = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} (r_1 + r_2) e^{i\theta} = -p \\ r_1 r_2 e^{i2\theta} = q \end{cases}$$

$$\text{d'où (I) } \begin{cases} p = (r_1 + r_2) e^{i(\theta+\pi)} \\ q = r_1 r_2 e^{i2\theta} \end{cases} \quad \begin{matrix} r_1, r_2 \geq 0 \\ \theta \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$p^2 - q^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2$$

Inversement, on vérifie que (I) $\Rightarrow$ l'équation (1) admet 2 racines ayant même argument :

$$z^2 + (r_1 + r_2) e^{i(\theta+\pi)} z + r_1 r_2 e^{i2\theta} = 0$$

$$z^2 - (r_1 + r_2) e^{i\theta} z + (r_1 e^{i\theta})(r_2 e^{i\theta})$$

Autre façon de conclure :

 p, q conviennent $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} p = (r_1 + r_2) e^{i\theta'} \\ q = r_1 r_2 e^{i2\theta'} \end{cases}$$

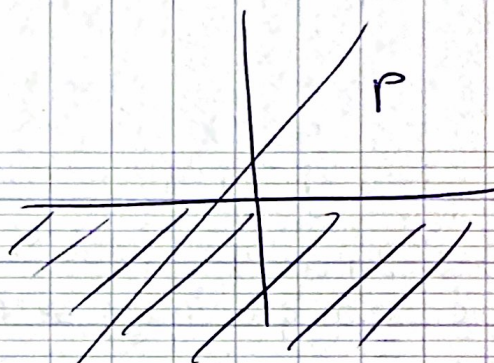
 $\text{soit } r_1, r_2 \geq 0$
 et
 $\theta' \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = r_1 e^{i\theta'} + r_2 e^{i\theta'} \\ q = r_1 e^{i\theta'} \cdot r_2 e^{i\theta'} \end{cases}$$

⑨

erreur
d'énoncé.

$$P = \{x+iy \mid y > 0\}$$



$$z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow z' = \frac{z \cos \theta + \sin \theta}{-z \sin \theta + \cos \theta} = \frac{x \cos \theta + \sin \theta + y i \cos \theta}{-x \sin \theta + \cos \theta - y i \sin \theta}$$

Reflexive

$$z \mathcal{R} z \Leftrightarrow \begin{aligned} -z^2 \sin \theta + z \cos \theta &= z \cos \theta + \sin \theta \\ -z^2 \sin \theta &= \sin \theta \end{aligned}$$

$$z' = \frac{z \cos^2 \theta + \sin \theta + i z \sin \theta \cos \theta}{-z \sin \theta \cos \theta + \cos \theta - i z \sin^2 \theta} = \frac{z \frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sin \theta + \frac{z}{2} i \sin 2\theta}{-z \frac{\sin 2\theta}{2} + \cos \theta - i \frac{z}{2} (1-\cos 2\theta)}$$

$$= \frac{\sin \theta + z \cos \theta e^{i\theta}}{\cos \theta - z \sin \theta e^{i\theta}}$$

$$z' = \frac{z(1+\cos 2\theta) + 2\sin \theta + z i \sin 2\theta}{-z(\sin 2\theta + i(1-\cos 2\theta))}$$

erreur d'énoncé.

$$p(z)^2 + a p(z) + b \mid - z^2 - a z - b \mid$$

$$\begin{aligned} & \frac{(p(z)-z)(p(z)+z+a)}{p(z)^2 + a p(z) + b} + \frac{z^2 + a z + b}{p(z)^2 + a p(z) + b} = \\ & = z^2 + a z + b \left(\frac{z^2 + a z + b - p(z)^2 - a p(z) - b}{p(z)^2 + a p(z) + b} \right) \end{aligned}$$

⑦ $\mathbb{P} \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $f(z) = \frac{z^2 + az + b}{z^2 + a'z + b'}$ $a \neq a' \quad b \neq b'$

⑨ (cf I.32)

$R: z R z \quad \theta = 0$

$S: z R z' \Rightarrow z' R z$

~~$z R$~~

Rappel: $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / ad - bc = 1 \right\} = SL(\mathbb{R}^2)$

$SL(\mathbb{R}^2)$ opère sur le plan de Poincaré $P = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im} z > 0\}$

$SL(\mathbb{R}^2) \times P \rightarrow P$

$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_u, z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} = b_u(z)$

c.a.d. $b_{uu} = b_u \circ b_u$

le problème s'en déduit:

$z R z' \Leftrightarrow \exists u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / b_u(z) = z'$

$z R z \Leftrightarrow \exists u / z = b_u(z) \quad b_u = \text{Id}$

$z R z' \Rightarrow b_u(z) = z' \Rightarrow \exists z = b_{u^{-1}}(z') \Rightarrow z' R z.$

Soit $z \in \mathbb{C}$ $\tilde{z} = \{ b_\theta(z) \text{ où } \theta \in \mathbb{R} \}$

(cours - entendu) $\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

$z' = \frac{z \cos \theta + \sin \theta}{-z \sin \theta + \cos \theta} \quad (2) \quad \theta \in \mathbb{R} \quad z \text{ fixe} \in P$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z' - z) \cos \theta - (zz' + 1) \sin \theta$$

$\Uparrow$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z' - z}{zz' + 1} \in \mathbb{R}$$

$$(\text{Sc } \theta \neq \pm \frac{\pi}{2})$$

$$(2) \quad f(z) = \frac{z^2 + az + b}{z^2 + a'z + b'} \quad \begin{cases} a \neq a' \\ b \neq b' \end{cases}$$

$$f(\varphi(z)) = f(z) \quad \varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\frac{\varphi(z)^2 + a\varphi(z) + b}{\varphi(z)^2 + a'\varphi(z) + b'} = \frac{z^2 + az + b}{z^2 + a'z + b'} \quad a, b, a', b' \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} & \cancel{z^2 \varphi(z)^2} + a \varphi(z) z^2 + \cancel{b z^2} + a' z \varphi(z)^2 + \cancel{a a' z \varphi(z)} \\ & \quad + \underline{a' b z} + b' (\varphi(z)^2 + a \varphi(z)) \\ &= \cancel{z^2 \varphi(z)^2} + \underline{a z \varphi(z)^2} + \underline{b \varphi(z)^2} + \underline{a' z^2 \varphi(z)} + \cancel{a a' z \varphi(z)} + \underline{a' b \varphi(z)} \\ & \quad + b' (z^2 + a z) \end{aligned}$$

d'où:

~~z~~

$$\cancel{z^2} \varphi(z) z^2 (a - a') + z^2 (b - b') + z \varphi(z)^2 (a' - a) + \varphi(z)^2 (b' - b) + a' b z - a' b \varphi(z) + a b' \varphi(z) - a b' z = 0$$

$$a \{ \varphi(z) z^2 - z \varphi(z)^2 \} + b \{ z^2 - \varphi(z)^2 \} + a' \{ z \varphi(z)^2 - \varphi(z) z^2 \} + b' \{ \varphi(z)^2 - z^2 \} + a' b (z - \varphi(z)) + a b' (\varphi(z) - z) = 0$$

$$(\varphi(z) - z) \{ a (-z \varphi(z)) + b (-(\varphi(z) + z)) + a' z \varphi(z) + b' (\varphi(z) + z) - a' b + a b' \} = 0$$

$$(\varphi(z) - z) (z \varphi(z) (a' - a) + \varphi(z) (b' - b) + z (b' - b) + a b' - a' b) = 0$$

$$(\varphi(z) - z) (\varphi(z) (z(a' - a) + b' - b) + z (b' - b) + a b' - a' b) = 0$$

Si $\varphi(z) = z \quad \forall z$ résolution.

Si $\exists z_0 / \varphi(z_0) \neq z_0$, alors:

$$M = \{ z \in \mathbb{C} / \varphi(z) \neq z \} \neq \emptyset \quad \forall z \in M \text{ on a:}$$

(*)

~~$\varphi(z)$~~

* Si $z = \frac{b-b'}{a'-a} \in M$, alors nécessairement :

$$z(b'-b) + ab' - a'b = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{a'b - ab'}{b' - b}$$

$$\text{On doit avoir : } -(b-b')^2 = (a'-a)(a'b - ab') \quad (C)$$

* Si $\frac{b-b'}{a'-a} \notin M$, alors $\forall z \in M$

$$f(z) = \frac{z(b-b') + a'b - ab'}{z(a'-a) + b' - b}$$

Conclusion :

Si (C) est vraie,

$\forall M \in \mathbb{C}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z) = z \quad \forall z \notin M \\ f(z) = \frac{z(b-b') + a'b - ab'}{z(a'-a) + b' - b} \quad \forall z \in M \end{array} \right.$$

est solution

Si (C) est fausse

$\forall M \in \mathbb{C}$ et

$\frac{b-b'}{a'-a} \notin M$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z) = z \quad \forall z \in M \\ f(z) = \frac{z(b-b') + a'b - ab'}{z(a'-a) + b' - b} \quad \forall z \notin M \end{array} \right.$$

$$z' = a\bar{z} + b$$

$$|a| = 1$$

z

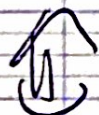
$$\begin{cases} z = a\bar{z} + b \\ \bar{z} = a\bar{z} + b \end{cases}$$

d'ou

$$\begin{cases} z' = e^{i2\theta} \bar{z} \\ \Delta = e^{i2\theta} \bar{\Delta} \end{cases}$$

$$\Delta = a^2 \bar{\Delta}$$

$$\frac{\Delta}{\bar{\Delta}} = e^{i2\theta}$$



$$\angle \arg \Delta = 2\theta$$

$$\Rightarrow \arg \Delta \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$(2\pi)$$

$$\theta = \arg \Delta$$

θ

$$\theta + \pi$$

(cf. I.32)

8

$$z^2 + pz + q = 0$$

$$p, q \in \mathbb{C}^*$$

$$\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \arg \frac{z_1}{z_2} = 0 \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

$$\text{Donc } \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}_+.$$

$$z^2 - \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right) z + 1 = 0 \text{ admet } \frac{z_1}{z_2} \text{ et } \frac{z_2}{z_1} \text{ comme racines.}$$

$$z^2 - \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} z + 1 = 0$$

$$z^2 - \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2q}{q} z + 1 = 0 \quad \text{où } z_1 + z_2 = -p$$

$$z^2 - \frac{p^2 - 2q}{q} z + 1 = 0$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{p^2 - 2q}{q} \in \mathbb{R}_+ \text{ (c'est la somme des racines)} \\ \Delta = \left(\frac{p^2 - 2q}{q} \right)^2 - 4 \geq 0 \text{ et } \neq \end{cases}$$

$\Leftarrow$ car $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ rac. réelles de produit $1 > 0$
et de somme positive.

donc deux racines positives.

$$\text{D'où } (1) \Leftrightarrow \left\{ \frac{p^2 - 2q}{q} \geq 2 \right\} \Leftrightarrow \frac{p^2}{q} \in [4, +\infty[$$

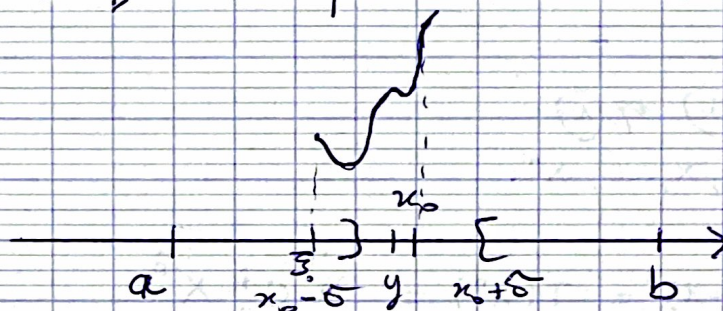
Exo n° 32 p 87 (Vauthier Capes)

f continue sur $[a, b]$

$$H = \{x \in]a, b[\mid \exists \xi < x \quad f(\xi) < f(x)\} \neq \emptyset$$

$$a) x_0 \in H \Rightarrow \exists \delta > 0 \quad]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset H$$

(en d'autres termes, montrer que H est un ouvert de $\mathbb{R}$)



$$x_0 \in H \Rightarrow \exists \xi_0 < x_0 \quad f(\xi_0) < f(x_0)$$

$$\text{Soit } \varepsilon = \frac{f(x_0) - f(\xi_0)}{2}$$

$$f \text{ est continue en } x_0 \Rightarrow \exists \eta \quad \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| < \eta \\ x \in [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0) - f(\xi_0)}{2}$$

$$\text{d'où } f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0) - f(\xi_0)}{2} = \frac{f(x_0) + f(\xi_0)}{2} \geq f(\xi_0)$$

$$(\text{car } f(x_0) \geq f(\xi_0))$$

On n'a qu'à prendre $\delta = \eta$.

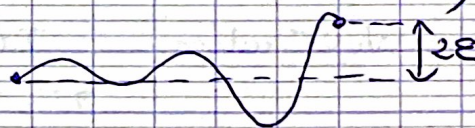
b)

$$H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]a_k, b_k[$$

disjoints

(car c'est un ouvert de $\mathbb{R}$)

$$f(a_k) = f(b_k)$$



$$H \subset [a, b] \Rightarrow a_k, b_k \in [a, b]$$

Algèbre.

(A)

$$T: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$P \mapsto Q \quad / \quad Q(X) = P(X+1)$$

$$\Delta = T - \text{Id}$$

I) ex 1)

$1, X, \dots, X^n.$

$$(X+1)^n = T(X^n) = \sum_{k=0}^n C_n^k X^k$$

$$\text{d'où } T^{-1}((X+1)^n) = \sum_{k=0}^n C_n^k X^k$$

$$\Downarrow$$
$$T^{-1}(Y^n) = (Y-1)^n$$

Donc :

$$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$$

$$\text{Alors } T^{-1}(P) = \sum_{i=0}^n a_i T^{-1}(X^i) = \sum_{i=0}^n a_i (X-1)^i$$
$$= P(X-1)$$

$$T^{-1}: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$$

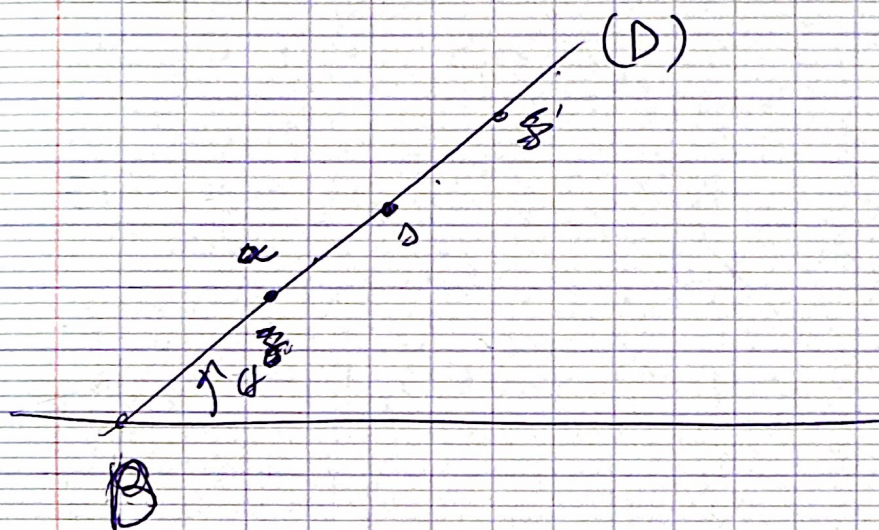
$$P \mapsto P(X-1)$$

Vérification: $T(P) = P(X+1)$

$$T^{-1} \circ T(P) = P(X-1) \circ P(X+1)$$

$$= T(P)(X-1)$$

$$= P(X) = P \quad \text{ow}$$



$$z \in (D)$$

$$z' = a^2 \bar{z}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda z = a^2 \lambda \bar{z}$$

$$\lambda = a^2 \bar{\lambda}$$

2

$$z' - z = \lambda i z$$

$$\lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$\forall z \neq 0$$

$$\begin{cases} a^2 \bar{z} - z = \lambda i z \\ \bar{a}^2 z - \bar{z} = -\lambda i \bar{z} \end{cases}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\bar{z} = \bar{a}^2 z + \lambda i \bar{z}$$

$$a^2 (\bar{a}^2 z + \lambda i \bar{z}) - z = \lambda i z$$

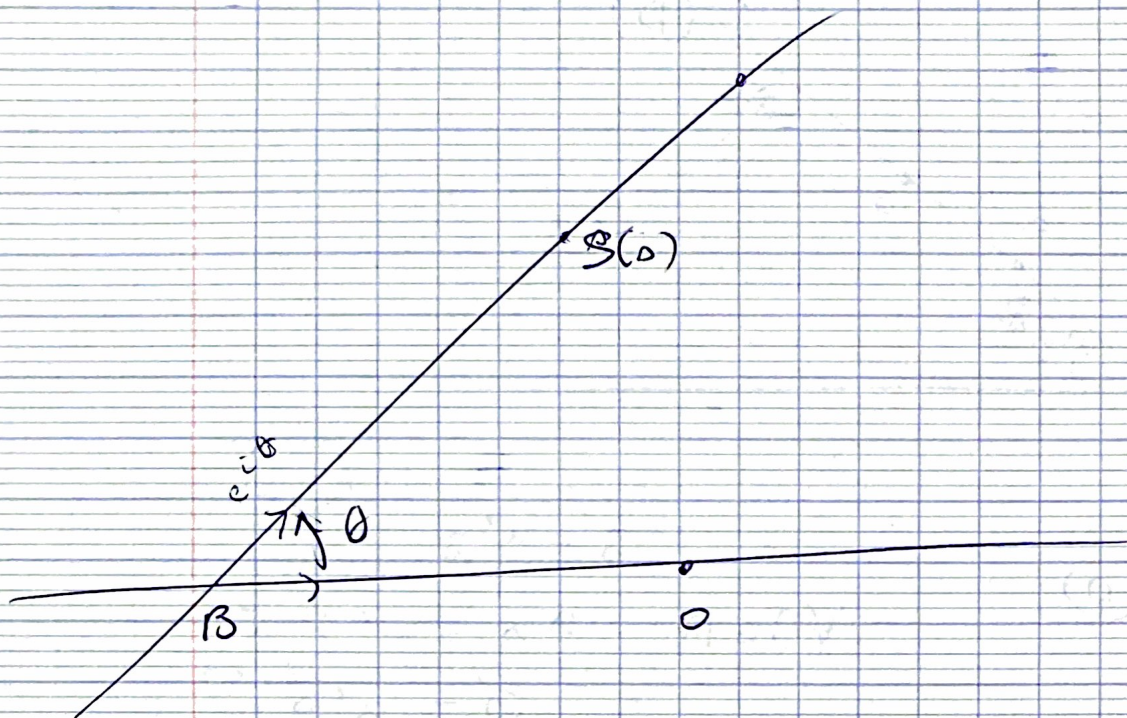
$$\cancel{a^2} z + a^2 \lambda i \bar{z} - z = \lambda i z$$

$$a^2 \bar{z} = z$$

$$\bar{a}^2 = \frac{a}{\bar{z}} = \frac{a^2}{|a|^2}$$

$$\begin{cases} z = a^2 \bar{z} \\ \bar{z} = \bar{a}^2 z \end{cases}$$

$$a = |a|^2 \bar{a}$$



$$\lambda + \lambda e^{i\theta} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$j' = a^2 j \quad |a| = 1$$

$$\lambda + \lambda e^{i\theta} = a^2 (\bar{\lambda} + \lambda e^{-i\theta}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = 0 \quad \boxed{\lambda = a^2 \bar{\lambda}}$$

d'où $\lambda e^{i\theta} = \cancel{\lambda a^2 \bar{\lambda} e^{-i\theta}}$

$\Downarrow$

$\boxed{a^2 = 1}$

$\boxed{a = \pm 1 \text{ et } \lambda = \bar{\lambda}}$

$\boxed{|a|^2 = e^{i2\theta}}$

~~$a = e^{i\theta}$~~

$\frac{0}{1} = e^{i2\theta}$

1) $k \in \mathbb{N}$

$$T^k(P) = P(X+k)$$

par récurrence :

$$T^{k+1}(P) = T(P(X+k)) = P(X+k+1) \quad \text{cvi.}$$

2) $k < 0$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z} \quad T^k(P) = P(X+k)}$$

②

$$\Delta(P) = T(P) - P$$

$$\Delta(P)(X) = T(P)(X) - P(X)$$

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

$$\boxed{\deg \Delta P = \deg P - 1}$$

En effet :

$$\Delta(P)(X^n) = (X+1)^n - X^n = \sum_{k=0}^{n-1} X^k C_n^k$$

$$P = \sum_{i=1}^r a_i X^i$$

$$\Delta(P) = \sum_{i=1}^r a_i \left(\sum_{k=0}^{i-1} X^k C_i^k \right)$$

le terme de plus haut degré $a_r X^r C_r^{r-1} = a_r X^{r-1} \underbrace{r}_{\neq 0}$

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

$$\Delta^n(X^n) = ?$$

$$\Delta(X) = X+1 - X = 1$$

$$\Delta^2(X^2) = \Delta((X+1)^2 - X^2) = \Delta(2X+1) = 2(X+1) + 1 - 2X - 1 = 2$$

$$\Delta^k(X^k) = k$$

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1}(X^{k+1}) &= \Delta^k(\Delta(X^{k+1})) \\ &= \Delta^k((X+1)^{k+1} - X^{k+1}) \\ &= \Delta^k\left(\sum_{i=0}^k X^i C_{k+1}^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^k C_{k+1}^i \Delta^k(X^i) \quad \text{car } i \leq k \end{aligned}$$

$$\Delta^{n+1}(X^n) = 0 \quad \text{car } \Delta \text{ abaisse le degré de 1 unité.}$$

$$\text{Donc } \deg \Delta(X^n) = n-1$$

$$\deg \Delta^{n+1}(X^n) = n - (n+1) = 0$$

$$\text{donc } \Delta^{n+1}(X^n) = \Delta(\text{cte}) = 0$$

$$\text{Donc } \Delta^k(X^i) = 0 \quad \forall i \in [0, k[.$$

$$\boxed{\Delta^{k+1}(X^{k+1}) = (k+1) \Delta^k(X^k)}$$

$$\Delta^2(X^2) = 2 \Delta(X)$$

$$\Delta^{k+1}(X^{k+1}) = (k+1)! \underbrace{\Delta(X)}_1$$

$$\bar{u}z + u\bar{z} + \lambda = 0$$

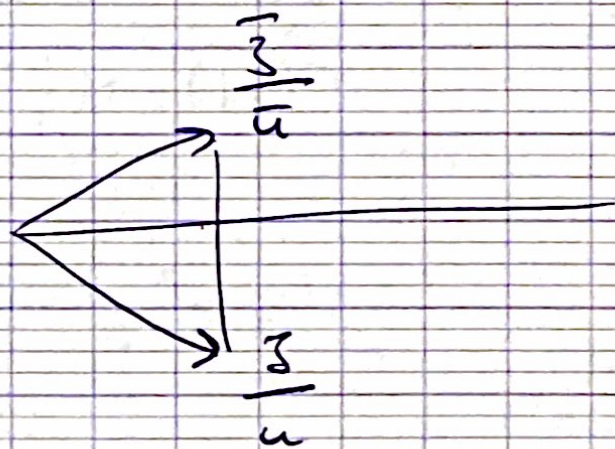
$$z = a + \lambda'(b-a) \quad \forall z \in (AB)$$

$$\bar{u}(a + \lambda'(b-a)) + u(\bar{a} + \lambda'(\bar{b}-\bar{a})) + \lambda = 0$$

$$\bar{u}z + u\bar{z} + \lambda = 0$$

$$\cancel{\frac{\bar{z}}{u}} + \cancel{\frac{\bar{z}}{\bar{u}}} + \frac{\lambda}{\cancel{u\bar{u}}} = 0 \Rightarrow \frac{z}{u} + \frac{\bar{z}}{\bar{u}} \in \mathbb{R}$$

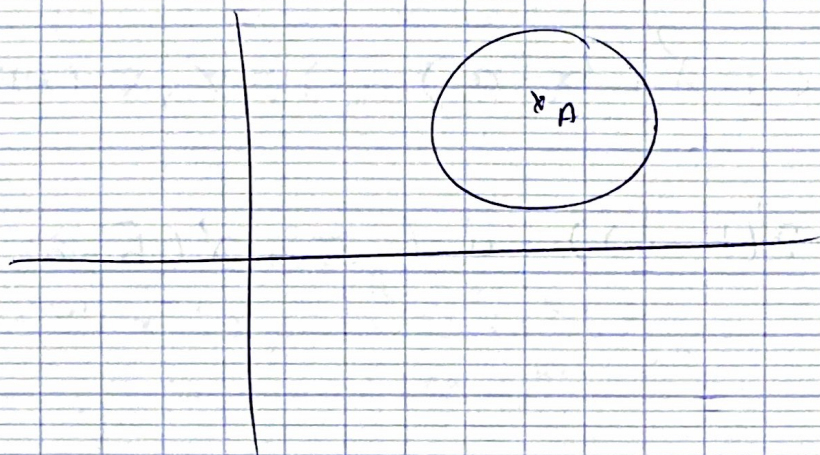
$$\frac{z}{u} + \frac{\bar{z}}{\bar{u}}$$



③

$$A(a = \alpha + i\alpha')$$

radius ρ



$$|z - a|^2 = \rho^2$$

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = \rho^2$$

$$z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} = \rho^2$$

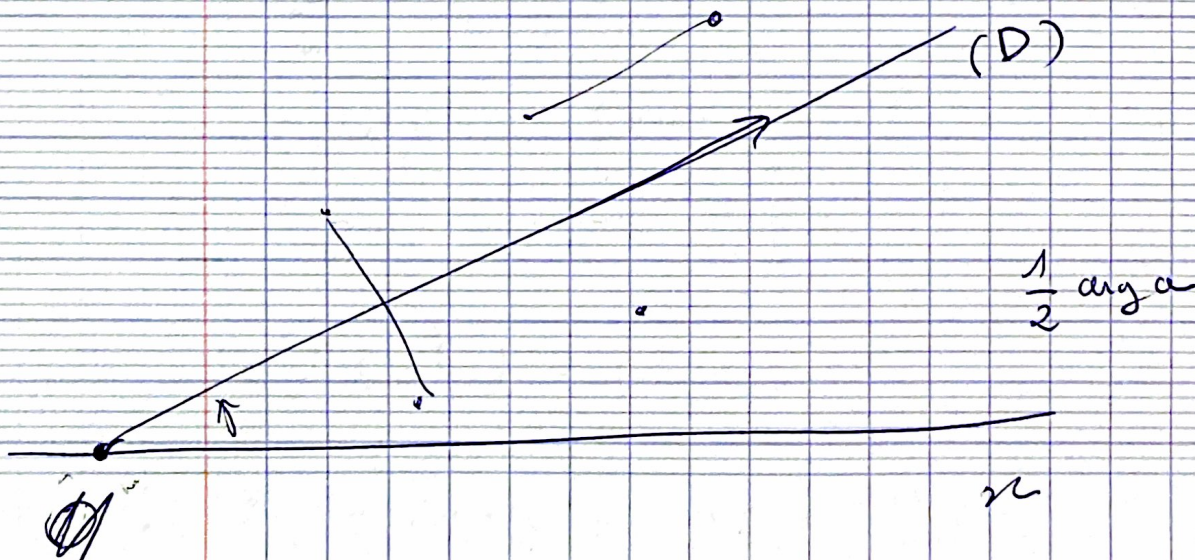
④

$$f(z) = z'$$

$$T(M) = M'$$

$$z' = a^2 \bar{z}$$

$$|a| = 1$$



In conclusion $\boxed{\Delta^k (X^k) = k!}$

(3)

$$\Delta^n P = (T - I)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k T^k (-1)^{n-k}$$

et

$$\Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k P(X+k)$$

$P(X+k)$ fait de $\Delta^i(P)(X)$?

$$P(X+1) = \Delta(P)(X) + P(X)$$

$$P(X+k) = T^k(P)$$

$$T = \Delta + I$$

$$T^k(P) = (\Delta + I)^k$$

d'où $T^k = \sum_{i=0}^k C_k^i \Delta^i$

$$\boxed{P(X+k) = \sum_{i=0}^k C_k^i \Delta^i(P)}$$

(4)

$$A = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (x-k)^n \neq \Delta^n x^n$$

$$(x-k)^n = P(x+k) \quad \text{ou} \quad P(x) = (x-2k)^n$$

$$\sum_{i=0}^k C_k^i \Delta^i(P)$$

d'ou

$$A = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k P(x+k)$$

$$\text{ou } P = (x-2k)^n \\ P = \sum_{j=0}^n C_n^j (-1)^j x^j$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k P(x+k)$$

$$A = (-1)^n \Delta^n P$$

$$P = \underbrace{(x-2k)^n}_Y$$

$$\Delta^n (y^n) = n!$$

$$\Delta^n (P)(x) = n!$$

⑩

I

$$(1) \quad 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$(2) \quad z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a} = 0$$

$$\bar{z}(z-a) - \bar{a}(z-a) = 0 \Leftrightarrow (\bar{z}-\bar{a})(z-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow |z-a| = 0$$

$$\Leftrightarrow z=a$$

$$(1') \quad 2z + i\bar{z} + 1 = 0$$

$$2(x+yi) + i(x-yi) + 1 = 0$$

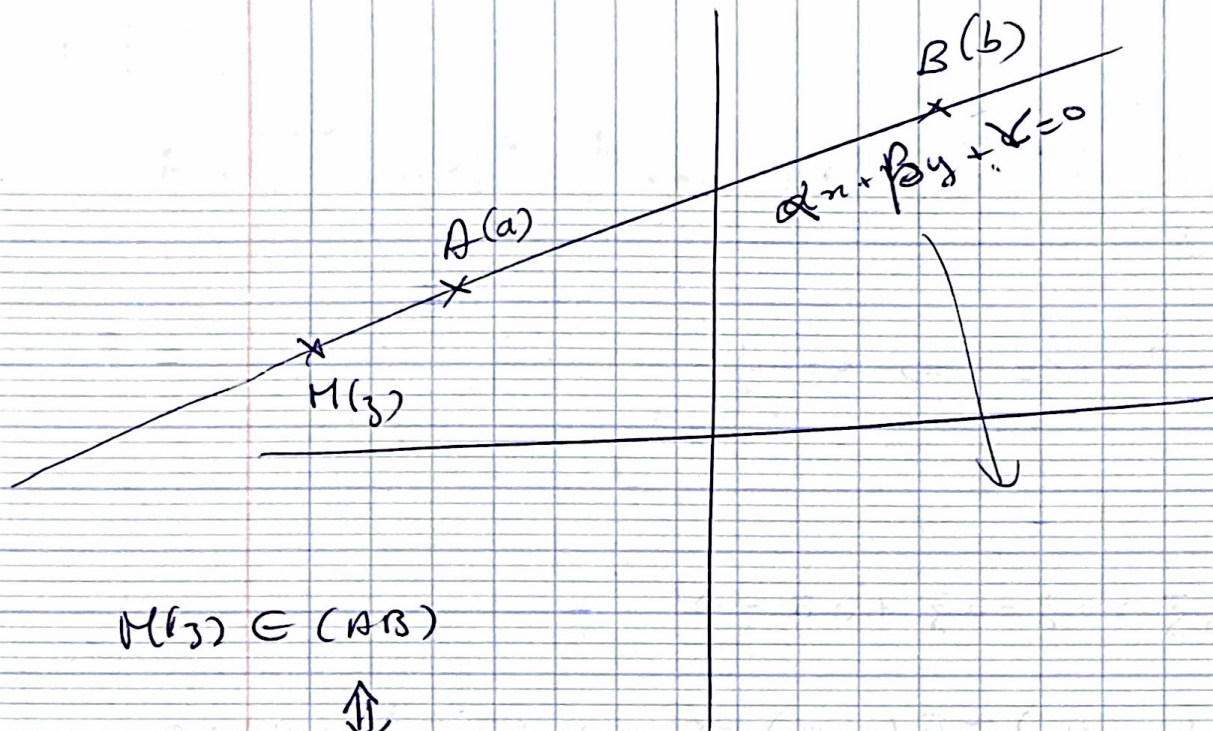
$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 2y+x=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3y+1 &= 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \\ x &= -2y \end{aligned}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}$$

$$(2') \quad \begin{aligned} z(\bar{z}-\bar{a}) &= 0 \\ (\bar{z}-\bar{a})(z-a) &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ \text{or} \\ z=a \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} z - a = \lambda (\overline{b} - \overline{a}) \\ \bar{z} - \bar{a} = \lambda (\overline{a} - \overline{b}) \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

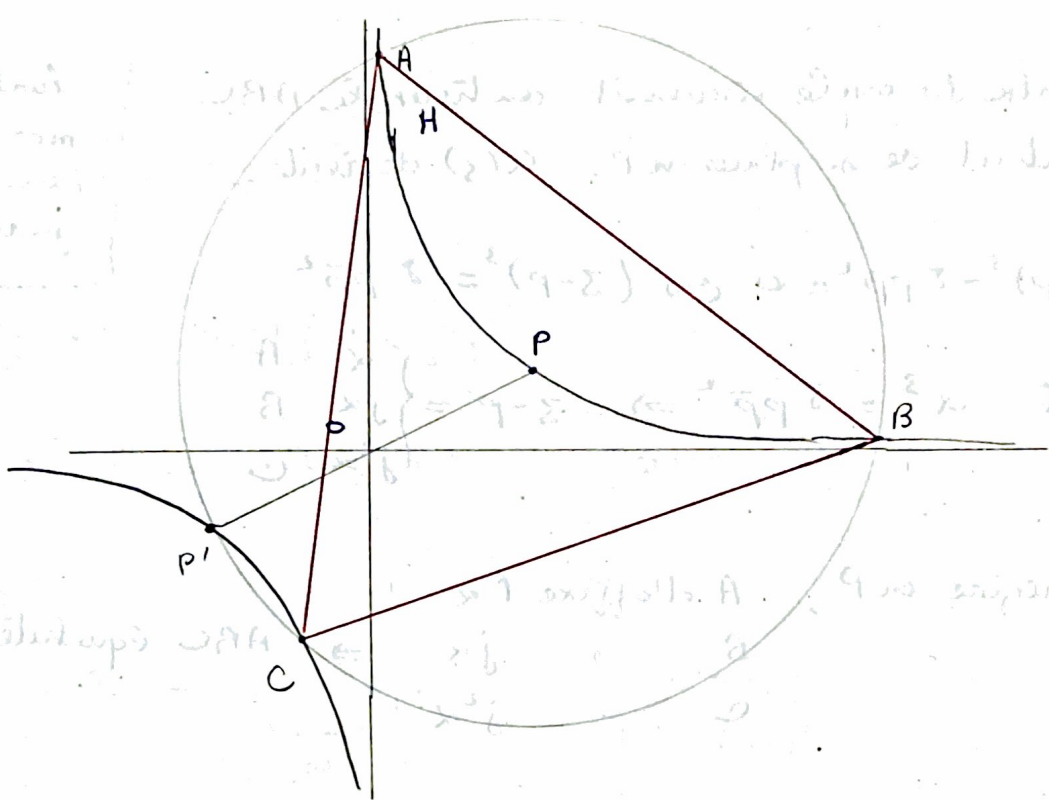
$\Downarrow$

$$\frac{z - a}{\overline{b} - \overline{a}} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\overline{a} - \overline{b}}$$

$(b \neq a)$

$$(\bar{b} - \bar{a})z + (a - b)\bar{z} - \underbrace{a(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{a}(b - a)}_{\lambda} = 0$$

$\Leftrightarrow$



$$\begin{cases} z^2 - \bar{z}^2 = p^2 - \bar{p}^2 & \text{est l'équation de la parabole l'hyperbole.} \quad (1) \\ |p - z|^2 = 4|p|^2 & (2) \end{cases}$$

(2) donne :

$$(p - z)(\bar{p} - \bar{z}) = 4p\bar{p}$$

$$z\bar{z} - p\bar{z} - \bar{p}z = 3p\bar{p}$$

$$\bar{z}(z - p) = \bar{p}z + 3p\bar{p}$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{p}z + 3p\bar{p}}{z - p}$$

En reportant dans (1) : $z^2(z - p)^2 - (\bar{p}z + 3p\bar{p})^2 = (p^2 - \bar{p}^2)(z - p)^2$

On obtient $z^4 - 2pz^3 + (2p^3 - 8p\bar{p}^2)z - p^4 - 8p^2\bar{p}^2 = 0$ (2')

Il existe déjà une solution, à savoir : $-p$.

On trouve :

$$(2') \Leftrightarrow (3) : (z + p)(z^3 - 3pz^2 + 3p^2z - p^3 - 8p\bar{p}^2) = 0$$

(3) de racines A, B et C.

P = centre du cercle circonscrit au triangle ABC
 Il est naturel de se placer en P . $Q(z)$ devient :

lundi matin
 mardi "
 mercredi " av. 18h
 jeudi

$$(z-p)^3 - 8p\bar{p}^2 = 0 \Leftrightarrow (z-p)^3 = 8p\bar{p}^2$$

$$\alpha \in \mathbb{C} \quad \alpha^3 = 8p\bar{p}^2 \Rightarrow z-p = \begin{cases} \alpha & A \\ j\alpha & B \\ j^2\alpha & C \end{cases}$$

Avec l'origine en P , A d'affixe α
 $B \quad \quad j\alpha \Rightarrow ABC$ équilatéral.
 $C \quad \quad j^2\alpha$

Copy

exo ④ du I.32.

$$Z = (z-a)^3(z-b)^3 \in \mathbb{R}$$

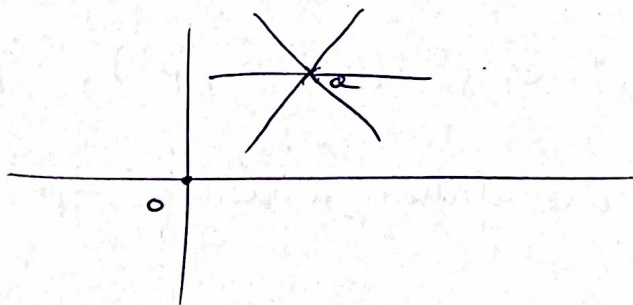
$$1^\circ \quad a=b \quad (z-a)^6 \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$6 \operatorname{Arg}(z-a) \equiv k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Arg}(z-a) = k \frac{\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

donc $z \in 3$ droites



$$2^\circ \quad b = -a$$

$$[(z+a)(z-a)]^3 \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$(z+a)(z-a) \in \mathbb{R} \cup j\mathbb{R} \cup j^2\mathbb{R}$$

$$\text{car } z^3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \theta, z = k e^{j\theta} \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{3}$$

$$z$$

$$* (z+a)(z-a) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \underbrace{xy = \alpha\beta}_{H_a}$$

$$\begin{cases} z = x + jy \\ a = \alpha + j\beta \end{cases}$$

H_a = hyperbole, parfaitement définie par ses asymptotes et par le point $a = \alpha + j\beta$.

$$* (z-a)(z+a) \in j\mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$(jz - ja)(jz + ja) \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$jz \in H_{ja}$$

$$\Downarrow$$

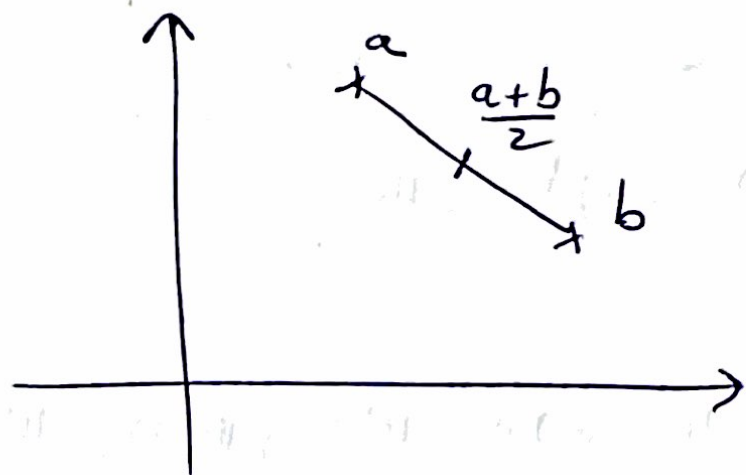
$$z \in j^2 H_{ja}$$

$$* (z-a)(z+a) \in j^2\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in j H_{ja}$$

$$z \in H_a \cup j^2 H_{ja} \cup j H_{ja}$$

3° a et b quelconques

Soit $t: z \mapsto z - \frac{a+b}{2}$



$$(z-a)^3 (z-b)^3 \in \mathbb{R}$$

$\Updownarrow$

$$(t(z) - t(a))^3 (t(z) - t(b))^3 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} t(a) = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} \\ t(b) = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} = -t(a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(a) = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} \\ t(b) = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} = -t(a) \end{cases}$$

$$t(z) \in \mathbb{H}$$

$$(t(z) - t(a))^3 (t(z) + t(a))^3 \in \mathbb{R}$$

$\Updownarrow$

$$t(z) \in H_{t(a)} \cup j^2 H_{j t(a)} \cup j H_{j^2 t(a)}$$



Résoudre $az + b\bar{z} = c$
 $a, b, c \in \mathbb{C}$

~~On obtient~~

$$\begin{cases} az + b\bar{z} = c \\ a\bar{z} + \bar{a}z = \bar{c} \end{cases} \quad (I)$$

* Si $\det = |a|^2 - |b|^2 \neq 0$, on montre qu'il y a 1 seule solution en z .
(à montrer!)

* Si $\det = 0 \Leftrightarrow |a| = |b|$

La condition de compatibilité de (I) est $\frac{(|a|^2 - |b|^2)}{0} z = \bar{a}c - b\bar{c}$

Si $\bar{a}c - b\bar{c} = 0$ la solution est $z / az + b\bar{z} = c$



Énoncé exo n° 8. Feuille E2

$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ f(x) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$$

dérivabilité en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} R(x) \quad \text{où } R(x) = \frac{f(x)}{x-1}$$

$$1) \text{ Si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} R(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} \frac{0}{x-1} = 0$$

Si f est dérivable en 1, alors forcément sa dérivée en ce point vaut 0.

2) Montrons que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{Q}^*}} R(x) = 0$, ce qui aura prouvé que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{R}^*}} R(x) = 0$, et donc que $f'(1) = 0$.

$$x \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow x = \frac{p}{q} \quad q > 0, \Delta(p, q) = 1$$

$$\left| \frac{p}{q} - 1 \right| < \eta \Rightarrow \frac{|p-q|}{q} < \eta \Rightarrow \frac{1}{q} < \eta$$

$$\text{Ainsi, comme } R\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{1}{p}$$

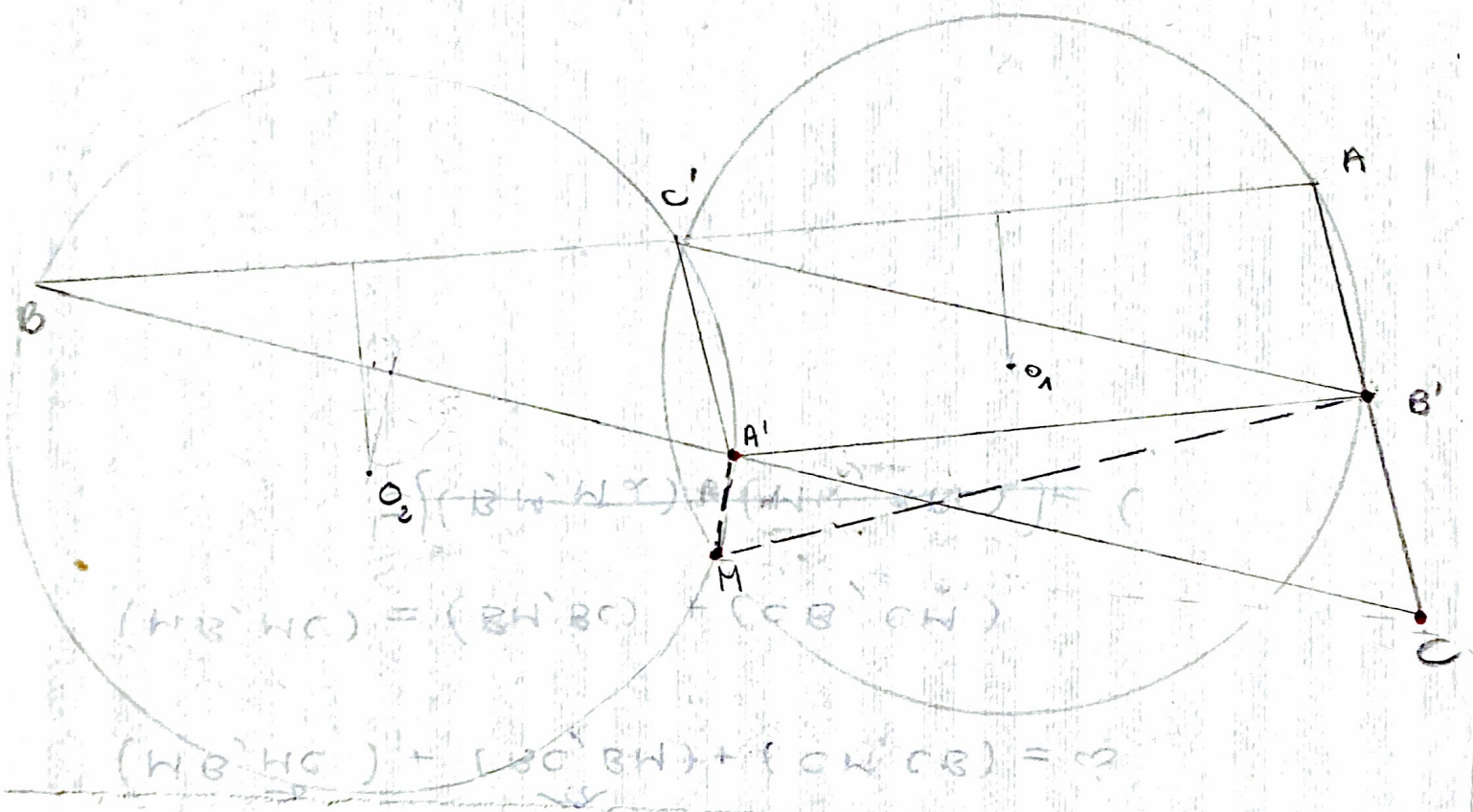
$$\left| R\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{1}{p} \right| = \left| \frac{1}{q} + \frac{q-p}{pq} \right| \leq \left| \frac{1}{q} \right| + \left| \frac{q-p}{pq} \right| \leq \left| \frac{1}{q} \right| + \left| \frac{1}{q} \right| = 2 \left| \frac{1}{q} \right|$$

On en déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad / \quad \left| \frac{p}{q} - 1 \right| < \frac{\alpha \varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{1}{q} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left| R\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq \varepsilon \quad \text{oui.}$$

Donc $f'(1) = 0$. CQFD

Exo : Solution du n° 10 (E.2)



La figure ci-dessus correspond au choix : A' milieu de BC
 B' " de AC
 C' " de AB

Ce choix n'intervient pas dans le raisonnement.

On utilise essentiellement le critère "d'alignement ou de cocyclicité" de 6 points distincts, critère qui s'énonce :

Th | A, B, C, D distincts.
 $| ABCD$ alignés ou cocycliques $\Leftrightarrow (\widehat{CA}, \widehat{CB}) = (\widehat{DA}, \widehat{DB})$

M , distinct de C' , est sur l'intersection des 2 premiers cercles de centre O_1 et O_2 . Montrons qu'il appartient au dernier cercle $A'B'C$, c.à.d. que $(\widehat{MB'}, \widehat{MA'}) = (\widehat{CB'}, \widehat{CA'})$ ($M \neq A'$, sinon trivial)

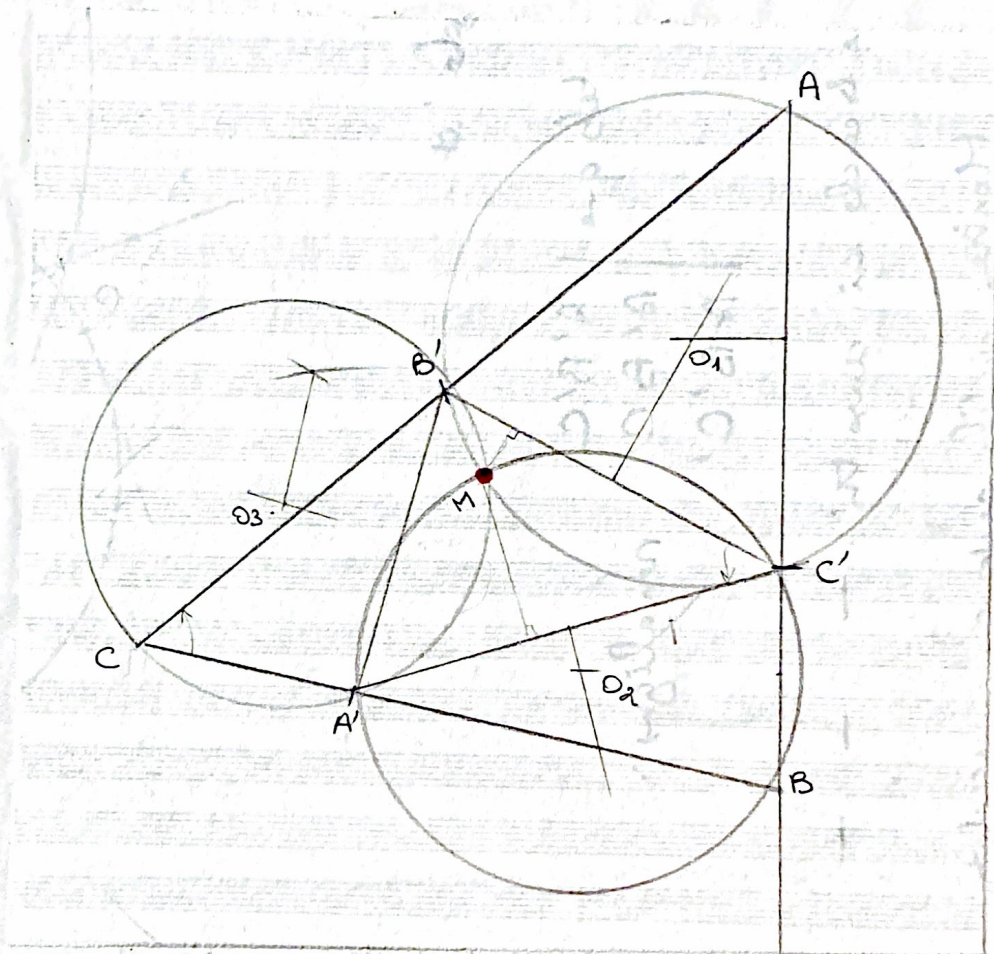
Gn a

$$\begin{aligned}
 \widehat{(MB', MA')} &= \widehat{(MB', MC')} + \widehat{(MC', MA')} \\
 &= \widehat{(AB', AC')} + \widehat{(BC', BA')} \\
 &= \widehat{(AB', AC')} + \widehat{(AC', BA')} \\
 &= \widehat{(AB', BA')} \\
 &= \widehat{(CB', CA')}
 \end{aligned}$$

d'où $M A' B' C$ cocycliques.

CQFD

(Voici une figure plus générale, où cela marche encore! C'est extraordinaire :)





Trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$C_n^k \text{ impair } \forall k \in [0, n]$$

I - méthode

I Observation

$$C_n^k \text{ impair}$$

Il faut que n soit impair ($k=1$), donc $n = 2m - 1$ (1)

$$k=2 \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2m-1)(2m-2)}{2} = (2m-1)(m-1)$$

$$C_n^2 \text{ impair} \Rightarrow m \text{ pair d'où } n = 4m_1 - 1 \quad (2)$$

$$k=3 \quad C_n^3 = \frac{(4m_1-1)(2m_1-1)(4m_1-3)}{3} \text{ toujours impair}$$

$$k=4 \quad C_n^4 = \frac{n(n-2)(2m_1-1)(m_1-1)}{3} \text{ impair} \Rightarrow m_1 \text{ pair}$$

$$\text{D'où } n = 2^3 m - 1$$

Idee : procéder par récurrence.

II Etude

1) Montrons l'implication: (H_p)

$$\boxed{C_n^0, C_n^2, \dots, C_n^{2^p} \iff n = 2^{p+1}m - 1} \quad (H_p)$$

$$0 \leq 2^p \leq n$$

pour p tel que $0 \leq 2^p \leq n$.

* Pour $p=1$ $C_n^0 C_n^1$ impair $\Leftrightarrow n=2m-1$

$C_n^0 C_n^1$ impair $\Leftrightarrow n=2m-1$

* (H_p) vraie $\Rightarrow (H_{p+1})$ vraie

On suppose que $C_n^0 C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{2^{p+1}}$ impair. D'après l'hypothèse de récurrence, on aura $n=2^{p+1}m-1$. Montrons que m est pair en considérant

$$C_n^{2^{p+1}} = C_{2^{p+1}m-1}^{2^{p+1}} = \frac{(2^{p+1}m-1)(2^{p+1}m-2) \dots (2^{p+1}m-2^{p+1})}{2^{p+1}!} = \frac{N}{D}$$

$$v_2(2^{p+1}!) = \sum_{k=1}^{p+1} \left[\frac{2^{p+1}}{2^k} \right] = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 1$$

$$v_2(N) = v_2\left(\prod_{\alpha=1}^{2^p} (2^{p+1}m - 2\alpha)\right) = 2^p + v_2\left(\prod_{\alpha'=1}^{2^{p-1}} (2^p m - 2\alpha')\right)$$

$$v_2\left(\prod_{\alpha=1}^{2^{p-1}} (2^p m - 2\alpha)\right) = 2^{p-1} + v_2\left(\prod_{\alpha'=1}^{2^{p-2}} (2^{p-1} m - 2\alpha')\right)$$

$$v_2\left(\prod_{\alpha=1}^2 (2^2 m - 2\alpha)\right) = 2 + v_2\left(\prod_{\alpha'=1}^1 (2m - 2\alpha')\right)$$

$$\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}-2}$$

$$v_2(N) = 2^p + 2^{p-1} + \dots + 1 + v_2(m-1)$$

$$C_n^{2^{p+1}} \text{ impair} \Leftrightarrow v_2(N) = v_2(2^{p+1}!) \Leftrightarrow v_2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m \text{ pair.}$$

CQFD

2) Montrons que :

$$C_n^0 \dots C_n^{2^x} \text{ impair} \Rightarrow \forall k \quad 2^x \leq k < 2^{x+1} \text{ et } k \leq n \quad C_n^k \text{ impair}$$

d'après le 1) :

$$n = 2^{x+1}m - 1$$

$$\text{et } C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

On montre que C_n^k impair pour $k \in [2^x, 2^{x+1}]$ par récurrence finie sur k .

* Vrai pour $n=0$: $C_n^{2^x}$ impair

* Supposons que $C_n^{2^x+n}$ impair.

$$C_n^{2^x+n+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-2^x-n)}{(2^x+n+1)!}$$

$$= \frac{n-2^x-n}{2^x+n+1} C_n^{2^x+n}$$

impair par hypothèse.

Tout revient à montrer que $Q = \frac{n-2^x-n}{2^x+n+1}$ a une valuation dyadique inférieure ou égale à 0.

$$n = 2^{x+1}m - 1 \text{ d'où } Q = \frac{2^{x+1}m - 1 - 2^x - n}{2^x + n + 1} = \frac{2^x(2m-1) - (n+1)}{2^x + n + 1}$$

$$Q = \frac{2^\alpha(2m-1) - (n+1)}{2^\alpha + n + 1}$$

• Si n pair, c'est terminé.

• Si n impair, alors $n = 2^\beta n' + 1$ où n' impair et $\beta \neq 0$.
(car $\beta = 0 \Rightarrow n$ pair)

$$\text{alors } Q = \frac{2^\alpha(2m-1) - (2^\beta n' + 2)}{2^\alpha + 2^\beta n' + 2} = \frac{2^{\alpha-1}(2m-1) - (2^{\beta-1} n' + 1)}{2^{\alpha-1} + 2^{\beta-1} n' + 1}$$

Pour $\alpha \geq 0$, on trouve $v_2(Q) \leq 0$. CQFD

3) $n \in \mathbb{N}$ tel que C_n^k impair $\forall k \in [0, n] \Leftrightarrow n = 2^\alpha - 1$ où $\alpha \in \mathbb{N}$.

Preuve : d'après les 1) et 2)

$$n \in \mathbb{N} / C_n^k \text{ impair } \forall k \in [0, n] \Leftrightarrow C_n^0 \dots C_n^n \text{ impairs}$$

$$\text{où } \alpha / n = 2^\alpha + n \quad 0 \leq n < 2^\alpha$$



$$(I) \quad n = 2^{\alpha+1} m - 1 = 2^\alpha + n \quad 0 \leq n < 2^\alpha$$

$$(I) \text{ donne } n = 2^{\alpha+1} m - 1 = 2^\alpha + n \quad \text{où } n < 2^\alpha$$

$$2^\alpha(2m-1) = n+1$$



$$2^\alpha | n+1 \text{ et } n+1 \leq 2^\alpha$$



$$n+1 = 2^\alpha$$

$$\text{d'où nécessairement } 2m-1=1 \Leftrightarrow m=1$$

Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{c} n \in \mathbb{N} \\ C_n^k \text{ impair } \forall k \in \{0, n\} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \exists \alpha \in \mathbb{N} / \\ n = 2^{\alpha+1} - 1 \end{array}}$$

(Cifres décimales, Répète Facile (Tome 1) D. Peckert - Hermann)

Solution

$\alpha \in \mathbb{Q} \rightarrow \alpha = a_0, a_1, a_2, \dots$ périodique.

Écrivez la division de la périodicité d'une suite décimale.

$a_0, a_1, a_2, \dots$ est périodique si $\exists N \geq 0, \exists p \geq 1 / \forall n \geq N, a_{n+p} = a_n$

Soit $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (soit $\alpha(p, q) = 1$)

L'algorithme de la division euclidienne permet de déterminer a_n ($n \in \mathbb{N}$).

En effet

(1) sont définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^n}$$

donc $a \leq \alpha < a+1 \rightarrow [\alpha] = a_0$ donc $p = a_0 q + r_0$ $0 \leq r_0 < q$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \Rightarrow a_1 \leq 10\alpha - 10a_0 < a_1 + 1$$

$$\text{d'où, puisque } 10\alpha - 10a_0 = \frac{10(p - a_0 q)}{q}$$

$$a_1 = \left[\frac{10(p - a_0 q)}{q} \right] \Leftrightarrow 10(p - a_0 q) = a_1 q + r_1 \quad 0 \leq r_1 < q$$

$$\Leftrightarrow 10r_0 = a_1 q + r_1$$

Montrons par récurrence que $a_n \in [10a_{n-1}]$

Supposons que $a_n \in [10a_{n-1}]$. Montrons que $a_{n+1} \in [10a_n]$

⊗ Soit $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ = ensemble des suites décimales défini par $i(\alpha) = a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \doteq \alpha$ (cf. cours)

Montrer que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \alpha \doteq a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \text{ est périodique.}$$

(référence: capes math. prépa à l'oral (Tome 1) D. Richard - Hermann)

Solution

1) $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \doteq a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ périodique

on rappelle la définition de la périodicité d'une suite décimale

" $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ est périodique si $\exists N > 0 \exists p \geq 0 / \forall n > N - a_{n+p} = a_n$ "

Soit $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. (où $\Delta(p, q) = 1$)

L'algorithme de la division euclidienne permet de déterminer a_n ($n \in \mathbb{N}$).

En effet:

(a_i) sont définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_0 + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq \alpha < a_0 + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

$$\text{D'où } a_0 \leq \alpha < a_0 + 1 \Rightarrow [\alpha] = a_0 \quad \text{d'où } p = a_0 q + r_0 \quad 0 \leq r_0 < q$$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \Rightarrow a_1 \leq 10\alpha - 10a_0 < a_1 + 1$$

$$\text{d'où, puisque } 10\alpha - 10a_0 = \frac{10(p - a_0 q)}{q}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= [10(\alpha - a_0)] \Leftrightarrow 10(p - a_0 q) = a_1 q + r_1 \quad 0 \leq r_1 < q \\ &\Leftrightarrow 10r_0 = a_1 q + r_1 \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que $a_n = [10r_{n-1}]$

Supposons que $a_{n-1} = [10r_{n-2}]$. Montrons que $a_n = [10r_{n-1}]$

Par un calcul très simple, nous obtenons :

$$a_n = [10 (10^n a - (10^n a_0 + \dots + a_n))]]$$

$$\begin{cases} p = a_0 q + r_0 \\ 10r_0 = a_1 q + r_1 \\ 10r_1 = a_2 q + r_2 \\ \dots \\ 10r_{n-2} = a_{n-1} q + r_{n-1} \end{cases} \begin{matrix} \times 10^{n-1} \\ \times 10^{n-2} \\ \times 10^{n-3} \\ \dots \\ \times 10 \\ \times 1 \end{matrix} \quad (E)$$

$$p = (10^{n-1} a_0 + 10^{n-2} a_1 + \dots + a_{n-1}) q + r_{n-1}$$

d'où $\Downarrow$

$$r_{n-1} = p - (10^{n-1} a_0 + 10^{n-2} a_1 + \dots + a_{n-1}) q$$

$$10r_{n-1} = 10p - 1$$

le lecteur poursuivra la récurrence. (pas le temps)
(facile mais?)

Ainsi

$$\begin{cases} p = a_0 q + r_0 \\ \dots \\ 10r_{n-1} = a_n q + r_n \\ 10r_n = a_{n+1} q + r_{n+1} \end{cases}$$

définissent $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

Cette suite est périodique car ; comme $0 \leq r_i < q$ ~~donc~~ $\exists l, k$

$$l \neq k \quad k < l \quad / \quad r_k = r_l$$

$$\text{Alors, pour } p = l - k \quad a_{n+p} = a_n \quad \forall n \geq k+1$$

QED

2) $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ périodique $\Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$
de période $p \in \mathbb{N}$

$N \geq 1$ $N = p$ petit entier tel que $a_{n+p} = a_n$, $\forall n > N$.

Posons $b_k = \sum_{n=N+kp}^{\infty} u_n$ (où $u_n = a_0 + \dots + \frac{a_n}{10^n}$)

$(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et a même limite que cette suite.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \alpha$$

Mais

$$b_0 = u_N = a_0 + \dots + \frac{a_N}{10^N}$$

$$b_1 = u_{N+p} = a_0 + \dots + \frac{a_N}{10^N} + b \quad \text{où} \quad b = \sum_{i=N+1}^{N+p} \frac{a_i}{10^i}$$

$$b_2 = a_0 + \dots + \frac{a_N}{10^N} + b + \frac{1}{10^p} b \quad (\text{compte tenu de } a_{n+p} = a_n \quad n > N)$$

etc...

$$b_k = u_N + b \left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \dots + \frac{1}{10^{(k-1)p}} \right)$$

~~c'est à dire~~ c'est à dire $b_k = u_N + b \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^k}{1 - \frac{1}{10}}$

$$b_k = u_N + b \cdot \frac{10}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^k \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = u_N + b \frac{10}{9} = \alpha \quad \text{et } b, u_N \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q} \quad \text{CQFD}$$

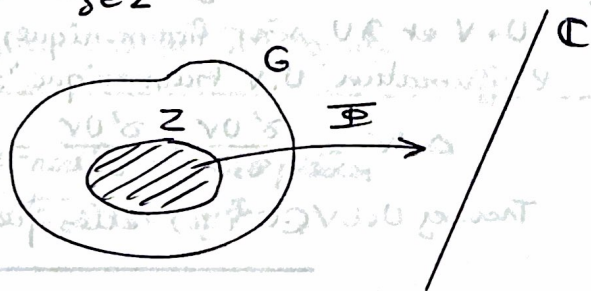
Q1 ● X et Y sont 2 e.v.n et $T: X \rightarrow Y$ est une bijection linéaire continue de X sur Y . On suppose, de plus, que T est surjective. Montrer que T n'admet pas d'inverse continue si $\exists x_n \in X / \|x_n\| = 1$ et $\|T(x_n)\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$)

R1 T^{-1} non continue $\Leftrightarrow \forall R \in \mathbb{R} \exists y_R \in Y / \|T^{-1}(y_R)\| > R \|y_R\|$
 $\Leftrightarrow \forall R \in \mathbb{R} \exists x_R \in X / \|x_R\| > R \|T(x_R)\|$
 $\Leftrightarrow \forall R \in \mathbb{R} \exists x_R \in X / \|x_R\| = 1 \text{ et } \|T(x_R)\| < \frac{1}{R}$
 $\Leftrightarrow \forall R \in \mathbb{N} \exists x_R \in X / \|x_R\| = 1 \text{ et } \|T(x_R)\| < \frac{1}{R}$

Ce qui nous donne bien une suite $(x_R)_{R \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les conditions de l'énoncé.

CQFD

Q2 ● (Sacks p 222, démonstration du théorème (1.22)). Soit $\Phi: G \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur l'ouvert G de $\mathbb{C}$ et telle que $\Phi(z) \neq 0$ pour tout $z \in G$. Soit Z un fermé inclus dans G . Montrer qu'alors $\inf_{z \in Z} |\Phi(z)| > 0$.



Q3 ● $\dim \text{Ker}(A \circ B) = \dim \text{Ker} B + \dim (R(B) \cap \text{Ker} A)$ pour tout endomorphismes A et B de l'espace vectoriel X , sous réserve que $\text{Ker} A$ et $\text{Ker} B$ soient de dimensions finies. ($R(B)$ désigne l'image de B)

R3 Solution: la démonstration est simple en dimension finie, puisque:

$$\dim X = \dim \text{Ker} B + \dim R(B) = \dim \text{Ker}(A \circ B) + \dim R(A \circ B)$$

$$\text{implique } \dim \text{Ker } A \circ B = \dim \text{Ker} B + \dim R(B) - \dim R(A \circ B)$$

Enfin $\dim R(B) \cap \text{Ker} A = \dim R(B) - \dim R(A \circ B)$ si l'on écrit toujours la même relation pour $A|_{R(B)}$.

En dimension infinie, on considérera l'application Ψ :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(A \circ B) & \xrightarrow{\Psi} & R(B) \cap \text{Ker} A \\ \downarrow \pi & \xrightarrow{\quad} & B(n) \\ \text{Ker}(A \circ B) / \text{Ker} B & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

isomorphisme

où $\text{Ker} \Psi = \text{Ker} B$ et Ψ surjective.

QFD

Q4 (Del Fatore) Montrer que tout anneau A inclus dans $\mathbb{Q}$ qui possède la propriété (P) : $\forall x \in \mathbb{Q} \quad x \in A \text{ ou } \frac{1}{x} \in A$ est de la forme $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid v_p(x) \geq 0\}$ pour un nombre premier p convenable. ($v_p(x)$ = valuation p -adique de x)

Q5 Soient U et V deux fonctions harmoniques sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. On sait qu'alors $U+V$ et λU sont harmoniques. On demande de trouver un contre-exemple à l'affirmation " U, V harmonique $\Rightarrow$ un simple calcul donne :

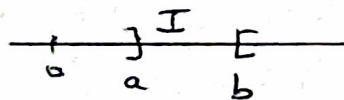
$$\Delta(UV) = \frac{\partial^2 UV}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 UV}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y}$$

Trouvez U et $V \in C^2(\Omega)$ telles que $\Delta(UV) \neq 0$.

Q6 Montrer que l'ensemble des "rais radicaux" de $\mathbb{Q}_+$, c'est-à-dire l'ensemble $\{ \sqrt{c} \mid c \in \mathbb{Q} \text{ et } \exists p \in \mathbb{P} \ v_p(c) \text{ impair} \}$, est dense dans $\mathbb{R}_+$.

En déduire que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

R6



On considère l'intervalle $I =]a, b[\subset \mathbb{R}_+$ et l'on montre l'existence d'un $\sqrt{c}$ dans I , où $c \in \mathbb{Q}$ et $v_p(c)$ impair pour un nombre premier p convenable.

Choisissons p , premier, assez grand pour que $\frac{b}{p} < 1$ et pour qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^2 < \frac{k}{p} < b^2$.

Alors $a < \sqrt{\frac{k}{p}} < b$ et $v_p(\frac{k}{p}) = 1$ impair. On voit que $v_p(\frac{k}{p}) = 1$ en supposant qu'il n'en est rien. Alors et il nous faut montrer que $\frac{k}{p} = c$ est tel que $v_p(\frac{k}{p}) = 1$ impair.

On peut choisir p de sorte que $a^2 < \frac{k}{p} < \frac{k+1}{p} < b^2$ (en le prenant suffisamment grand)

Cela étant, $a < \sqrt{\frac{k}{p}} < \sqrt{\frac{k+1}{p}} < b$.

suite de SG : de 2 choses l'une : Si k est tel que $v_p(k) = 0$, c'est fini, I2
 puisque $v_p\left(\frac{k}{p}\right) = -1$ impair. On prend alors $c = \frac{k}{p}$.

Si k ne vérifie pas $v_p(k) = 0$, posons

$$k = \frac{a}{b} = p^n \frac{a'}{b'} \text{ où } n \in \mathbb{Z}^* \text{ et où } \Delta(a', p) = \Delta(b', p) = 1. \text{ Considérons } k+1.$$

$$k+1 = \frac{p^n a' + b'}{b'}, \text{ et } \Delta(p, b') = 1; \Delta(p^n a' + b', p) = 1, \text{ donc } v_p(k+1) = 0$$

Ainsi, si $v_p(k) \neq 0$, $v_p(k+1) = 0$ et l'on prend $c = \frac{k+1}{p}$.

On aura bien $v_p(c) = -1$ impair, et $a < c < b$. Ainsi $R_+ = \{\sqrt{c} / c \in \mathbb{Q} \text{ et } v_p(c) \text{ impair}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Conséquence : Ainsi $R = \{\pm \sqrt{c} / c \in \mathbb{Q} \text{ et } \exists p \in P \text{ } v_p(c) \text{ impair}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et nous pouvons écrire :

$$R \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \bar{R} = \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}}$$

Q7 Montrer que $\int_0^{2\pi} \ln |1 - a e^{i\theta}| d\theta = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \text{ tel que } |a| \leq 1.$

R7 Ref. of Sacks "Fonctions analytiques", p 102. On utilise le développement de $\ln(1-z)$. Cette formule est utilisée dans l'égalité de Jensen, démontrée sur le $\hat{m}$ ligne. D'autres exercices qui suivent ce développement p-102 sont très intéressants.

N1 ~~Q7~~ Théorème d'Abel : u_n et v_n désignent deux suites réelles ou complexes.

Considérons $\sum u_n v_n$. Si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\sum_{k=0}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|$ convergente

2) $|\sum_{k=1}^n u_k|$ borné

3) $v_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty)$

Alors $\sum u_n v_n$ converge $\gg$

Ce théorème est à la base des 2 lemmes d'Abel, classiques :

Ⓘ $\sum u_n v_n$

1) $|\sum_{k=1}^n u_k|$ borné

2) v_k suite positive, décroissante, tendant vers 0

Alors $\sum u_n v_n$ converge.

Ⓜ $\sum (-1)^n v_n$

et v_n est une suite positive, décroissante, tendant vers 0.

Alors $\sum u_n v_n$ converge.

La clef du Théorème d'Abel : la transformation d'Abel précisée dans la Proposition qui suit :

Proposition : Soit $a : \sum_{k=1}^n u_k v_k = \Delta_n v_n + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k (v_k - v_{k+1})$ où $\Delta_k = \sum_{i=1}^k u_i$

preuve : Posons $\Delta_k = \sum_{i=1}^k u_i$ et $\Delta_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Gn a : } \sum_{k=1}^n u_k v_k &= \sum_{k=1}^n (\Delta_k - \Delta_{k-1}) v_k = \sum_{k=1}^n \Delta_k v_k - \sum_{k=1}^n \Delta_{k-1} v_k \\ &= \sum_{k=1}^n \Delta_k v_k - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k v_{k+1} \\ &= \Delta_n v_n + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k (v_k - v_{k+1}) \end{aligned}$$

CQFD

Application : preuve du Théorème d'Abel.

$$\text{Gn a } \sum_{k=1}^n u_k v_k = \Delta_n v_n + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k (v_k - v_{k+1}) \quad \text{où } \Delta_k = \sum_{i=1}^k u_i$$

↓ puisque $|\Delta_n|$ borné
et $v_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$)

et $\sum \Delta_k (v_k - v_{k+1})$ est absolument convergente, puisque :

$$\sum |\Delta_k (v_k - v_{k+1})| \leq M \sum |v_k - v_{k+1}| < \infty$$

borne des $|\Delta_k|$

donc $\sum_{k=1}^n u_k v_k$ converge.

CQFD

(Ref : Sacks et Sigmund, chap : "Théorème d'Abel".)
"Fonctions analytiques".

Remarques : 1) De bons théorèmes de convergence uniformes proviennent du théorème d'Abel et de la transformation d'Abel. A ce sujet, voir le cours et les exercices passionnants du livre de Sacks et Sigmund : "Fonctions analytiques", chapitre "Th. d'Abel".

2) Très bonnes applications de ce théorème, avec conséquences, dans le livre de Schwartz : "Cours d'analyse" (Hermann), page 134 à 136 tome 1 et page 153 à 154 tome 1.

N2 : Rapport entre transposition et adjoint

- 1) Soient X et Y deux Banach. On note X^* (resp. Y^*) les duals de X et de Y . On peut définir la transposée de toute application linéaire T de X vers Y :

$$X \xrightarrow{T} Y$$

$$X^* \xleftarrow{^tT} Y^*$$

$$\text{où } \forall x \in X \quad \forall y \in Y^* \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, ^tTy \rangle$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ représentent les crochets de dualité. Par définition on a $\langle x, f \rangle \doteq f(x)$)

- 2) Si X est un Hilbert, et si T est une appl. linéaire continue de X dans X , on voit qu'il existe toujours une application adjointe, notée T^* , de X dans X , cette application étant définie par l'égalité : $\forall x, y \in X \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$. (Le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire hermitien de X)

Quel est le lien entre T^* et ^tT dans ce cas ?

- 3) Notons $\sigma : X \rightarrow X'$ (cf. Théorème de dualité) $a \mapsto f_a / f_a(x) = \langle x, a \rangle$

pour les Hilberts) que σ est une application bijective antilinéaire qui conserve la norme. Cette application permet, en quelque sorte d'identifier X et X' . Mieux que cela ! Elle permet d'identifier ^tT et T^* car :

$$\boxed{T^* = \sigma^{-1} \circ ^tT \circ \sigma} \quad (1)$$

On aura donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{^tT} & X \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X' & \xleftarrow{^tT} & X' \end{array}$$

Preuve de (1) : Notons $\tau = \sigma^{-1} \circ ^tT \circ \sigma$ et montrons que $\tau = T^*$. Pour tout $x, y \in X$

$$\langle x, \tau y \rangle = \langle x, \sigma^{-1} \circ ^tT \circ \sigma(y) \rangle \quad \text{Pour tout } y \in X, \text{ on a :}$$

$$\sigma(y) = f_y$$

$$^tT \circ \sigma(y) = ^tT(f_y) : x \mapsto f_y(Tx) = \langle Tx, y \rangle$$

$$\sigma^{-1} \circ ^tT \circ \sigma(y) = \sigma^{-1}(\{x \mapsto \langle Tx, y \rangle\}) = \sigma^{-1}(\{x \mapsto \langle x, T^*y \rangle\})$$

$$= T^*y$$

$$\text{donc } \langle x, \tau y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

$$\text{Ainsi : } \tau(y) = T^*(y) \quad \forall y \in X$$

QFD

N3 : Support d'une distribution

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$. Cela signifie que

1) $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{C}$ est linéaire, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ représentant l'espace vectoriel des applications C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^k$.

2) T est continue en ce sens :

$\forall K$ compact de $\mathbb{R}^k \quad \exists C > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K = \text{fcts. } C^\infty \text{ support inclus dans } K$

$$|\langle \varphi, T \rangle| \leq C \sum_{|p| \leq m} \sup_K |D^p \varphi(x)|$$

(où $p = (p_1, \dots, p_k)$ est un multi-indice et où $|p| = \sum_{i=1}^k p_i$)

T est alors continue pour la topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ associée à la famille de semi-normes $\sup_K |D^p \varphi(x)|$, où K compact de $\mathbb{R}^k$ et $p = (p_1, \dots, p_k)$.

Définition : $\text{Supp } T$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^k$ défini par :

$\{\text{Supp } T \neq \emptyset\}$ le plus grand ouvert Ω de $\mathbb{R}^k$ tel que $\forall K \subset \Omega \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K \quad \langle \varphi, T \rangle = 0$

Proposition : D'autres définitions sont possibles. Parmi celles-là :

1) $\{\text{Supp } T = \{x \in \mathbb{R}^k / \exists \text{ voisinage } U_x \text{ de } x / \forall K \subset U_x \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K \quad \langle \varphi, T \rangle = 0\}$

(c'est une définition plus locale)

2) $\text{Supp } T$ est le plus petit fermé F de $\mathbb{R}^k$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ qui s'annule au voisinage de F , on ait : $\langle \varphi, T \rangle = 0$

3) $\text{Supp } T =$ le plus petit fermé en dehors duquel T est nul, ie le plus petit fermé F de $\mathbb{R}^k$ tel que $\forall K \subset [F, \infty) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K \quad \langle \varphi, T \rangle = 0$

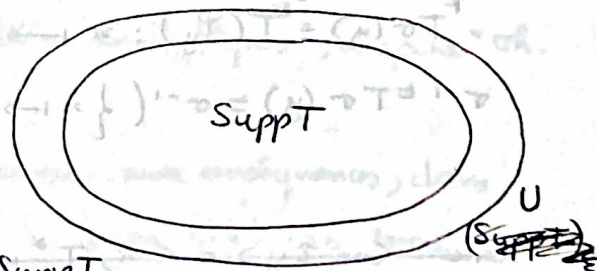
preuve :

1) La définition équivaut au 1) (laissez au lecteur)

2) Montrons que $\text{Supp } T$ vérifie 2). $\text{Supp } T$ est fermé puisque $\{\text{Supp } T \text{ est ouvert, par définition. Montrons que si } \varphi \in \mathcal{D} \text{ s'annule au voisinage de } \text{Supp } T, \langle \varphi, T \rangle = 0.$

• Donnons nous $\varphi \in \mathcal{D}$ s'annulant au voisinage de $\text{Supp } T$. On peut supposer que ce voisinage est de la forme $(\text{Supp } T)_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^k / d(x, \text{Supp } T) < \varepsilon\}$
(voir lemme 1 à la fin de la démonstration)

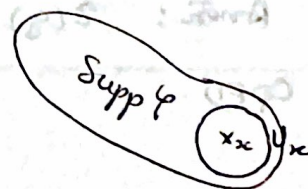
Ainsi : $\varphi|_{(\text{Supp } T)_\varepsilon} = 0$ en notant U ce voisinage de $\text{Supp } T$



Cela nous donne nécessairement $\text{Supp } \varphi \subset \text{Supp } T$.

(En effet : $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^k / d(x, A) = 0\}$)

(cf lemme 1)



$\forall x \in \text{Supp } \varphi \quad \exists U_x$ ouvert contenant x tel que $x \in U_x \subset [\text{Supp } T]$

Comme $\text{Supp } \varphi$ est compact, $\text{Supp } \varphi = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$.

D'après le lemme de partition C^∞ de l'unité, nous avons l'existence de fonctions E_i vérifiant simultanément :

$$\begin{cases} E_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k) \\ \text{Supp } E_i \subset U_{x_i} \\ \sum E_i = 1 \end{cases}$$

Alors $\varphi = \sum (E_i \varphi)$ où $\text{Supp } E_i \varphi \subset \text{Supp } E_i \subset U_{x_i}$

et : $\langle \varphi, T \rangle = \sum \langle E_i \varphi, T \rangle = 0$ puisque $E_i \varphi$ a son support dans $U_{x_i} \subset [\text{Supp } T]$

(voir 1) de la proposition) $= 0$

• Montrons que $\text{Supp } T$ est le plus petit ensemble possédant les propriétés du 2). Pour cela, supposons, par l'absurde, que F , fermé, possède la propriété 2) et vérifie $F \not\subset \text{Supp } T$. Prenons $x \in \text{Supp } T \setminus F$

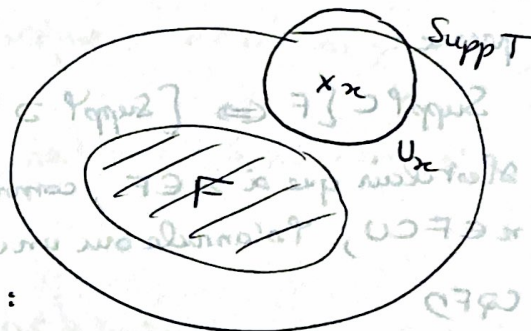
$\exists U_x$ voisinage de $x \in \text{Supp } T$ / $x \in U_x \subset [F]$

$\forall K \subset U_x \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K \quad \langle \varphi, T \rangle = 0$ d'après 2), et puisque φ ne s'annule pas au voisinage de F , ce qui est absurde selon la définition 1) de $\text{Supp } T$:

En effet, $\{\text{Supp } T \cup U_x$ serait ainsi un plus grand ouvert possédant la propriété

$\forall K \subset \Omega \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K \quad \langle \varphi, T \rangle = 0$.

2) est bien montré.

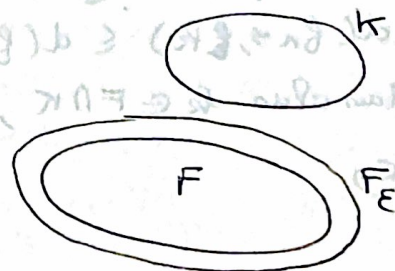


3) Ⓞ Montrons le 3) : Commençons par voir que $\text{Supp } T$ (défini comme dans la définition, dans 1), ou dans 2) !) vérifie la propriété 3. C'est un fermé F , et si K est un compact tel que $K \subset [F]$, si $\varphi \in \mathcal{D}_K$ alors :

$\text{Supp } \varphi \subset K \subset [F] \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tel que $\varphi|_{F_\varepsilon} = 0$. On applique ensuite (lemme 2)

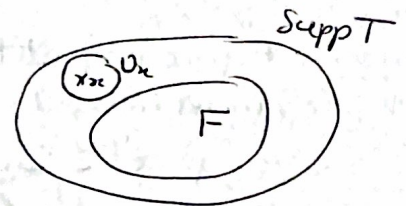
la propriété 2) de la proposition : $\varphi \in \mathcal{D}$ s'annule au voisinage de F , donc $\langle \varphi, T \rangle = 0$.

Ⓢ



Il faut aussi montrer que $\text{Supp } T$ est le plus petit fermé possédant la qualité exprimée au 3). Sinon il existerait F , fermé, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} F \subsetneq \text{Supp } T \\ \text{et} \\ \forall K \subset F \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K \quad \langle \varphi, T \rangle = 0 \end{array} \right.$$



On arrive à une absurdité $\neq$ comme au 2) $\odot$ en prenant $x \in \text{Supp } T \setminus F$ et U_x ouvert / $x \in U_x \subset F$. $\{\text{Supp } T \cup U_x\}$ contient strictement $\{\text{Supp } T\}$, est ouvert et possède la propriété : $\forall K \subset \{\text{Supp } T \cup U_x\} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K \quad \langle \varphi, T \rangle = 0$. D'après la définition même de $\text{Supp } T$, $\{\text{Supp } T \cup U_x\} = \{\text{Supp } T\} \Rightarrow x \in \{\text{Supp } T\}$, absurde.

3) est démontrée.

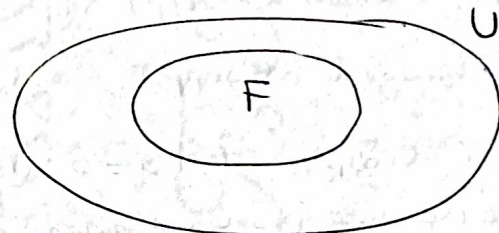
support de la fonction φ

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lemme 1 : } U \text{ ouvert, } F \text{ fermé, } F \subset U \\ \varphi|_U = 0 \text{ et } \varphi \text{ à support compact} \\ (\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Supp } \varphi \subset F$$

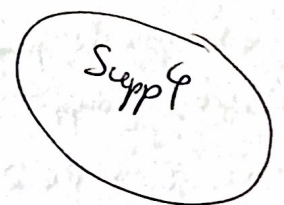
preuve :

$$\text{Supp } \varphi \subset F \Leftrightarrow \{\text{Supp } \varphi\} \supset F$$

Il est clair que si $x \in F$, comme $\varphi|_U = 0$ et $x \in F \subset U$, φ s'annule sur un voisinage de x et donc $x \in \{\text{Supp } \varphi\}$.



$\square$ Q.F.D



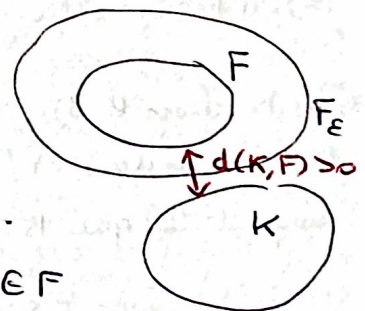
Dans un espace métrique (E, d) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lemme 2 : } K \text{ compact} \\ F \text{ fermé} \end{array} \right\} K \cap F = \emptyset \Leftrightarrow d(K, F) > 0$$

(En d'autres termes, si $K \subset F$, il existera $\varepsilon > 0$ / $K \subset F_\varepsilon$)

preuve : Si $K \cap F = \emptyset$, supposons par l'absurde que $d(K, F) = 0$.

Comme $d(K, F) \doteq \inf_{\substack{k \in K \\ f \in F}} d(k, f)$, il existera 2 suites $k_n \in K$ et $f_n \in F$



telles que : $d(k_n, f_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$). K est compact, donc $(k_n)_n$ admet une sous-suite qui converge vers $k \in K$, mais alors $f_n \rightarrow k$ ($n \rightarrow +\infty$) puisque $d(f_n, k) \leq d(f_n, k_n) + d(k_n, k)$, et comme F est fermé, $k \in F$. Mais alors $k \in F \cap K$, ce qui est absurde.

$\square$ Q.F.D

Corollaire : $T = \text{distribution sur } \mathbb{R}^k$ ($T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$)
 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$

Alors $\text{Supp } T \cap \text{Supp } \varphi = \emptyset \Rightarrow \langle \varphi, T \rangle = 0$

preuve : Il suffit d'appliquer la proposition précédente 3) avec $F = \text{Supp } T$

pour dire : $\text{Supp } \varphi \subset \{\text{Supp } T\}^c \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\text{Supp } T} \text{ donc } \langle \varphi, T \rangle = 0$

CQFD

(Remarque : On peut montrer que $\text{Def} \Leftrightarrow 3$) directement en passant au complémentaire)

On considère l'anneau $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ des polynômes de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{I}(V)$ l'ensemble des idéaux de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ constitués de polynômes qui s'annulent en tout point de V .

On sait que l'anneau $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ est un anneau noethérien (appel : Si A est un anneau noethérien, alors $A[x_1, \dots, x_n]$ aussi). Ainsi, tout ensemble algébrique V est défini grâce à un nombre fini de polynômes.

Une conséquence importante du théorème de la hache, de Hilbert, est la suivante :

2.1. Construction de la chaîne descendante

La suite d'ensembles algébriques est stationnaire.

Soit $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$ alors $\exists i / V_i = V_{i+1} = \dots$

Soit V, V' des ensembles algébriques de $\mathbb{C}^n \Rightarrow V \cup V'$ aussi.

Définition : Un ensemble algébrique V est appelé une ^{algébrique} variété ou un ensemble algébrique irréductible si $V \neq \emptyset$ et s'il ne peut s'écrire comme réunion d'ensembles algébriques.

Donc, V irréductible $\Leftrightarrow \mathcal{I}(V)$ est premier.

Si V est irréductible, le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \mathcal{I}(V)$ est appelé le corps des fractions rationnelles sur V , et il est isomorphe à l'extension de $\mathbb{C}$ engendrée par $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \mathcal{I}(V)$ sur $\mathbb{C}$. Soit $\mathbb{C}(V)$ une sous-variété de V , on définit le corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{C}(V)$ à celle de V . (cf. Lang, Algèbre Géométrique).

Faits élémentaires concernant les ensembles algébriques (réels ou complexes)

(Ref: Milnor "Singular points of complex hypersurfaces", p 8 à)

Soit $\mathbb{E}$ un corps infini ($\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Définition: Un sous-ensemble $V \subset \mathbb{E}^m$ est appelé un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{E}^m$ si V est l'ensemble des zéros communs à une collection de fonctions polynomiales sur $\mathbb{E}^m$.

Notons $\mathbb{E}[x_1, \dots, x_m]$ l'anneau des gts polynomiales de $\mathbb{E}^m$ sur $\mathbb{E}$ et $I(V)$ l'idéal de $\mathbb{E}[x_1, \dots, x_m]$ constitué des polynômes qui s'annulent en tout point de V .

$$I(V) = \{ p \in \mathbb{E}[x_1, \dots, x_m] / p(x) = 0 \quad \forall x \in V \}$$

Le théorème de la base d'Hilbert montre que tout idéal de $\mathbb{E}[x_1, \dots, x_m]$ est engendré par un nombre fini d'éléments (Rappel: Si A est un anneau noethérien, alors $A[x_1, \dots, x_n]$ aussi). Ainsi, tout ensemble algébrique V est défini grâce à un nombre fini de polynômes.

Une conséquence importante du théorème de la base, de Hilbert, est la suivante:

2.1 Condition de la chaîne descendante

Toute suite décroissante d'ensembles algébriques est stationnaire.

i.e, si $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ alors $\exists i / V_i = V_{i+1} = \dots$

NB: $V, V' =$ sous-ensembles algébriques de $\mathbb{E}^m \Rightarrow V \cup V'$ aussi.

Définition: Un ensemble algébrique V est appelé une variété^{algébrique}, ou un ensemble algébrique irréductible si $V \neq \emptyset$ et s'il ne peut s'écrire comme réunion disjointe de 2 ensembles algébriques.

Ainsi, V irréductible $\Leftrightarrow I(V)$ idéal premier

Si V est irréductible, le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{E}[x_1, \dots, x_m] / I(V)$ est appelé le corps des fonctions rationnelles sur V , et le degré de l'extension de ce corps relatif à $\mathbb{E}$ est appelé la dimension algébrique de V sur $\mathbb{E}$. Si $W \subsetneq V$ est une sous-variété de V , la dimension de W est inférieure ou égale à celle de V . (cf. Lang, Algebraic Geometry p29)

2.4 Théorème (Whitney)

Soit $V \subset \mathbb{E}^m$ un sous-ensemble algébrique non vide. Choisissons k polynômes $f_1, \dots, f_k$ qui engendrent l'idéal $I(V)$ et pour $x \in V$, considérons la matrice $k \times m$ $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ évaluée en x . Notons ρ le rang le plus grand atteint par cette matrice lorsque x varie dans V .

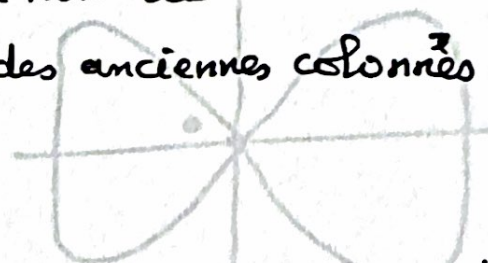
Définition: $x \in V$ est un point régulier, ou simple, si la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j}$ atteint son rang maximum ρ en x .

Exemples: 1 seul point singulier l'origine 3 dans le cas contraire, cà d

si $\text{rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) < \rho$. / $y^2 - x^2(1-x^2) = 0$ = variété de $\mathbb{R}^2$

Singularité: point double où 2 branches ont des tangentes distinctes.

NB: la déf. est indépendante du choix de $f_1, \dots, f_k$, puisque si nous ajoutons un nouveau polynôme $f_{k+1} = g_1 f_1 + \dots + g_k f_k$, la nouvelle matrice aura une nouvelle colonne faite de combinaisons linéaires des anciennes colonnes.



2.2 lemme:

L'ensemble $\Sigma(V)$ des points singuliers de V forme un sous-ensemble algébrique (peut être vide) de V .

preuve: $x \in V \cap \Sigma(V) \Leftrightarrow$ chaque mineur de $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ d'ordre $\rho \times \rho$ vaut zéro en x .
Donc $\Sigma(V)$ est déterminé par des équations polynomiales.

Ce qui suit suppose que $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.5 lemme

2.3 Théorème de Whitney

$V =$ sous-ensemble algébrique de $\mathbb{R}^m$ (ou $\mathbb{C}^m$) défini par un seul

$\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$V =$ sous-ensemble algébrique de $\mathbb{E}^m$. On suppose que V est irréductible et que, dans le cas

réel, V contient un point régulier de $p(x)$. Alors l'ensemble $V \setminus \Sigma(V)$ des points réguliers de V forme une variété ana. lisse et non vide. Cette variété est une variété analytique (réelle ou complexe) de dimension $m - \rho$ sur $\mathbb{E}$.

(preuve: cf. Whitney "Elementary Structure of Real algebraic Varieties")

NB: Si V est irréductible, Whitney montre que la dimension de la variété analytique $V \setminus \Sigma(V)$ sur $\mathbb{E}$ est égale à la dimension algébrique de V sur $\mathbb{E}$.

2.4 Théorème (Whitney)

V et W sont 2 ensembles algébriques de $\mathbb{E}^n$, où $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $V \supset W$, alors $V \setminus W$ possède au plus un nombre fini de composantes connexes.

exemple: V n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

$$V \setminus \Sigma(V)$$

"

"

"

(peux : appendice A)

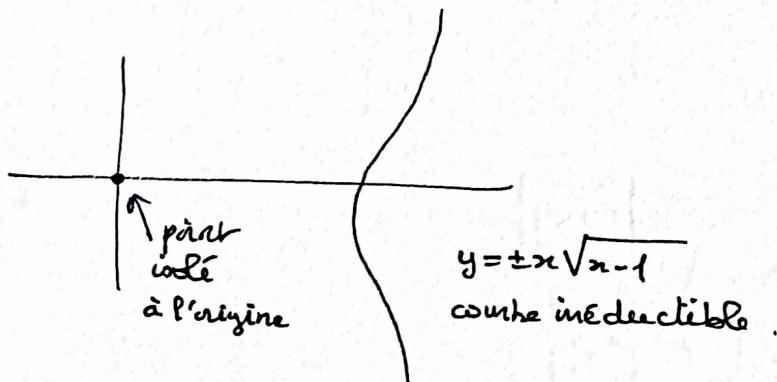
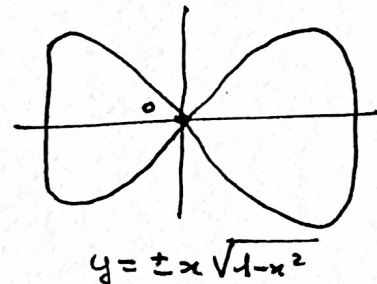
3 exemples: 1 seul point singulier, l'origine. 3 sous-ensembles algébriques de $\mathbb{R}^2$:

ex 1: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - x^2(1-x^2) = 0\}$ = variété de $\mathbb{R}^2$

Singularité : point double où 2 branches ont des tangentes distinctes ^{algéb.}.

On a: $y = x\sqrt{1-x^2}$ et $y = -x\sqrt{1-x^2}$ où $x \in]-1, 1[$

ex 2: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - x^2(x-1) = 0\}$



ex 3: $y^3 = x^{100}$

2.5 lemme

V = sous-ensemble algébrique de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{E} \otimes^n$) défini par un seul polynôme $f(x) = 0$. On suppose que f est irréductible et que, dans le cas réel, V contient un point régulier de $f^{(*)}$.

Alors tout polynôme qui s'annule sur V est un multiple de f .

(*) pour éviter les cas pathologiques du genre $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Conséquences des 2 théorèmes de Whitney.

2.6 Corollaire

Tout ensemble algébrique V (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) peut s'écrire sous la forme d'une réunion finie et disjointe $V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p$ où chaque M_j est une variété ~~analytique~~ lisse avec un nombre fini de composantes connexes.

De la même façon, la différence $V \setminus W$ de 2 variétés algébriques s'exprime comme une telle réunion finie.

2.7 Lemme

variété lisse, valeurs critiques.